

16993

APOLLONII PERGAEI

LOCORUM PLANORUM

Robinson
5758

LIBRI II.

RESTITUTI

A

ROBERTO SIMSON M.D.

MATHESEOS IN ACADEMIA GLASGUENSI PROFESSORE.

GLASGUAE,

IN AEDIBUS ACADEMICIS,

EXCUDEBANT ROB. ET AND. FOULIS ACADEMIAE TYPOGRAPHI.

A. D. MDCCXLIX.

1749

1651/674

X

APOLLONII PERGAEI

LOCORUM PLANORUM

LIBRI II

RESTITUTY

ROBERTO SIMSON M.D.

MATHESIS IN ACADEMIA CAESAREA PROFESSOR.

CLASSICAE

IN AEDIBUS ACADEMICIS

EX LIBRIS SOCIETATIS ACADEMICAE

A.D. MDCCXIX



NOBILISSIMO ET HONORATISSIMO DOMINO,

D. J O A N N I
C O M I T I D E B U T E,
V I C E C O M I T I D E K I N G A R T H,

D O M I N O

M O U N T - S T E U A R T , C U M B R A Y E T I N C H M A R N O C K ;

- A N T I Q U I S S I M I E T N O B I L I S S I M I
O R D I N I S S T I A N D R E A E E Q U I T I ;
E L E G A N T I O R U M A R T I U M E T S C I E N T I A R U M
F A U T O R I E T C U L T O R I E G R E G I O ;

L. M. Q. D. D.

ROBERTUS SIMSON.

NOBILISSIMO ET HONORATISSIMO DOMINO

D. JOANNI

COMITI DE BUTE

VICECOMITI DE KINGARTH

DOMINO

MOUNT-STUART, CUMBRAY ET INCHMARNOCK

ANTIGUISSIMI ET NOBILISSIMI

ORDINIS ST ANDREAE EQUITI

ELEGANTIORUM ARTIUM ET SCIENTIARUM

PAUTORI ET CULTORI REGIO

G.D.D.



JOHN GIBBS SIMON

P R A E F A T I O.



GEOMETRAS veteres, libros non pauciores triginta tribus analyfi inservientes, scripsisse, auctor est Pappus Alexandrinus, qui solus illorum nomina, et Propositiones quas continebant, magno Geometriae emolumento, servavit. idemque iis qui facultatem investigandi Problemata acquirere velint libros hosce unice utiles esse affirmat. Et Recentiores postquam Veterum in Theorematum et Problematum demonstrationibus et constructionibus perspicuitatem et elegantiam cognoverant, recte quidem concluderunt artem analyticam magnopere ab iis excultam et promotam fuisse; Veteres autem artem hanc sedulo oculuisse, Recentiorum multi inepte omnino asseruerunt. Etenim Franciscus Schootenius, in tractatu suo de concinnandis demonstrationibus Amstelaedami an. 1661 impresso, de Geometris veteribus ita scribit: “ Qui (veteres sc.) id unice studuisse videntur, quo sua inventa, eorum-
“ que demonstrationes, posteris majori admirationi forent, ut modum,
“ quo ea ipsa invenerint ac demonstrationibus muniverint, prorsus sup-
“ primerent et absconderent.” Et, magis explicite, Petrus Schootenius Francisci frater, in praefatione ad eundem librum, Francisci in hac re sententiam sic exponit, “ Neque (Franciscus sc.) dubitabat quin plera-
“ raque omnia, quae Veteribus tantum gloriae peperissent, Analyse-
“ os ope et beneficio reperta essent: sed quae illi, ut inventorum major
“ admiratio foret, dissimulato hoc artificio et suppresso, vulgari tantum
“ Syntheseos forma exhibuissent. sed cum Veterum dissimulatione fac-
“ tum videret, hunc Analyticae methodi praestantem usum non mo-
“ do a multis ignorari et negligi, sed ipsam ejus certitudinem ac eviden-
“ tiam a nonnullis suspectam haberi, atque adeo soli Synthesi miseran-

“do labore inhaereretur: consultum judicavit &c.” En gravis veterum accusatio, cui veteres certe nullam unquam praebuerunt ansam; sed quae ignorantiae Recentiorum in veterum scriptis, tempore quo vixit Schootenius, hoc est post edita scripta illa, unice debetur. Schootenius enim alique, cum certo scirent Analysin veteribus cognitam fuisse, neque aliam ullam nossent praeter eam quae Algebrae ope instituitur, quae fuit ipforum culpa, nullumque Algebrae ante Diophantum vestigium invenirent, inde collegerunt Veteres artem Analyticam, data opera, posteris celasse. Primus hujus sententiae auctor fuisse videtur Petrus Nonius, qui de Veteribus in Algebra sua fol. 114. b, ita conqueritur, “O quam bene foret, si qui in scientiis Mathematicis scripserint auctores, scripta reliquissent inventa sua eadem methodo, et per eosdem discursus, quibus ipsi in ea primum inciderunt; et non ut in Mechanica loquitur Aristoteles, de Artificibus, qui nobis foris ostendunt suas quas fecerint Machinas, sed artificium abscondunt, ut magis apparent admirabiles. Est utique inventio, in arte qualibet, diversa multum a traditione; neque putandum est, plurimas Euclidis et Archimedis propositiones, fuisse ab illis ea via inventas qua nobis illi ipsas tradiderunt.” Et huic opinioni subscribit Doctiss. Wallisius initio cap. 2. suae Algebrae, qui ibidem hunc locum Nonii ex Hispanica lingua in praecedentem versionem Latinam transtulit. Et in eandem sententiam Schootenius, ut jam ostensum, et Recentiores fere omnes eunt. Excusandus quidem est Petrus Nonius, quem Pappi Alexandrini Collectiones Mathematicas nunquam vidisse verisimile est. Nonii enim Algebra Antverpiae impressa fuit anno 1567, Pappi autem Collectiones non ante annum 1588 editae fuerunt. Wallisius^a vero et Schootenius^b viderunt Pappi Praefationem ad Lib. 7. Collectionum, in qua praedicti libri Veterum Analytici enumerantur, ex quorum argu-

^a Vid. pag. 2. Algebrae, Vol. 2. Op.

^b Vid. ejus in locos planos Apollonii praefationem.
mentis

mentis, in eadem Praefatione plene recensitis, clarissime liquet, tantum abfuisse ut Veteres artem Analyticam supprimerent et absconderent, ut eam non solum multo studio excoluerint, sed de ea tot libros conscribendo, promulgaverint. Quos quidem libros Geometrae versabant sexcentos et plures annos, a tempore sc. Apollonii Pergaei usque ad Pappum Alexandrinum. Adeo igitur absurda est haec Veterum accusatio, ut soli Recentiorum incuriae debeatur, et minime vera habenda sit.

Existimat Clarissimus Halleius, ^c cui multum debet vera Geometria, Pappum praedictos triginta tres libros sub titulo τόπαι ἀναλυόμενοι collegisse, ut exempla daret analyseos institutionis efficacissima, et discen-
tium captui longe accommodatiora. Ex iis autem quae in libris hisce continebantur, liquido constat eos conscriptos fuisse, ut artis Analyticae studiosi, instrumenta et auxilia Problematum resolutioni maxime necessaria, sibi parata haberent. Huic autem usui diverso modo inserviebant hi libri. Datorum enim liber Propositiones continet quarum perpetuus et necessarius est usus in Problematis cujuscunque generis solvendis. Libri de Locis planis, solidis, et Locis ad superficiem, ut et Porismatum libri, multorum Problematum resolutioni inserviunt. Si enim, ex. gr. ex una hypothesisi five conditione Problematis, demonstratum fuerit punctum in Problemate quaesitum tangere Locum quendam positione datum, et ex alia conditione ostensum fuerit idem punctum tangere alium Locum positione datum; describendo hos Locos, punctum quaesitum in eorum interfectione necessario invenietur, et Problema solutum erit. Libri de sectione Rationis, Spatii, sectione Determinata, de Tactionibus et Inclinationibus, generalia admodum continent Problemata, ad quae solutiones aliorum Problematum saepissime deducuntur. quotiescunque autem hoc evenit, Problema solutum habetur, citando eum Librum et Propositionem ad quam deductum fuerit; cujus exempla apud Pappum

^c Vid. Praefationem ejus ad libros Apollonii de sectione rationis, prope finem.

extant.

extant. Unde et in omnibus hisce libris Analyticis, omnes casus, omnesque Problematum in iis solutorum determinationes, plene enumerabantur et soluta erant, ut quotiescunque ad aliquod eorum Problema aliquod deductum fuerat, ilico pateret solutio casus ad quem deductum est, ejusque determinatio, si qua fuerit.

Inter hos Veterum de analysi Geometrica libros, duo Apollonii Pergaei de Locis planis, in solutione Problematum frequentioris et praecipui sunt usus. Eos acutissimus Fermatius ante annum 1629 restituerat, ut ex epistola ejus in pag. 153 operum patet. Non autem ante annum 1670 impressi fuerunt inter Fermatii opera varia. Eosdem etiam restituit Schootenius, anno 1657 inter Exercitationes suas Mathematicas, impressos. Uterque vero Casus et Determinationes Locorum negligit, sine quibus parum sunt utiles; solamque Locorum synthesein sine analysi tradunt, duobus aut tribus Locis exceptis, in quibus Schootenius calculum arithmeticum adhibet.

Operae igitur pretium videbatur libros hosce plenius et magis Apollonii instituto consentaneos exhibere: neque Lemmatum quae in Locos hos scripsit Pappus Alexandrinus, aut quae, ab Apollonio scripta, servavit, usum et explicationem Geometris ingrata fore putabam. Eorum enim maxima et praecipua pars a Fermatio, Schootenio, aliisque intacta est; neque quibus Locis, aut cui omnino usui inserviunt, a tempore quo primum editae fuerunt Pappi Collectiones, ad hoc usque tempus cognitum fuit. Ope autem quorundam horum, solutio quam dederat ipse Apollonius Loci qui habetur in Prop. 5. Lib. 2. quem unam ex pulcherrimis in Geometria Propositionibus praedicat Fermatius, restituta est; quae quidem elegantia haud parum praestat solutioni quam dedit Fermatius. ea autem Schootenii purus est calculus arithmeticus.

Nonnulli forsitan qui ei quae calculo algebraico peragitur, magis quam analysi Geometricae assueti sunt, existimabunt libros de Locis planis

planis et solidis parum utiles habendos esse, utpote nullas Propositiones continentes quae non ad paucos Canones generales deduci possint, quales exhibuere Cartesius, Joannes de Wit, quosque magis generales reddidit Joannes Craig, et ex eo Marchio de L. Hospital. Verum hi Canones nullius sunt usus in Locorum investigatione, sed huic tantum utiles ut Locus qui in aequatione aliqua, jam inventa, continetur, ope alicujus horum Canonum construat. Quin et vel huic rei parum idonei sunt hi Canones, si sc. Locus construendus vel multo simplicior, vel multo magis compositus fuerit eo qui habetur in Canone cujus ope construendus est. tunc enim non nisi per ambages, et vias minimè naturales constructio fiet. Praeterea, ex rite instituta Problematis, vel Loci alicujus, analysi Geometrica, compositio haud difficulter, plerumque sponte, fluit. Contra autem, postquam Locus ad aequationem deductus est, plus negotii et ingenii ad ejus compositionem, ope Canonis generalis, perficiendam, quam ad aequationis inventionem saepe requiritur. Et hoc quidem multis exemplis ex Marchione de L'Hospital aliisque scriptoribus ostendi facile posset; quorum unum adducere satis erit. Canones $y=c+\frac{bx}{a}$, $y=c-\frac{bx}{a}$ duo sunt ex iis quos tradunt auctores pro constructione Locorum ad rectam lineam. Videamus igitur quomodo his utantur in constructione Loci alicujus, ex. gr. ejus qui habetur in Prop. xi. Lib. i. de Locis planis Apollonii a Schootenio restitutis, qui Locus ut a Schootenio resolvitur *, ad sequentem aequationem deducitur, viz. $y=cdio+efko+ghlo+abnx+cdox-efox-ghox$ divisa per $mzz+bnz-doz-foz+hoz$. tum jubet Schootenius, brevitatis causa, p scribi pro $cdio+efko+ghlo$ divis per $mzz+bnz-doz-foz+hoz$, et $\frac{q}{r}$ loco ipsorum $abn+cdo-efo-gho$ per $mzz+bnz-doz-foz+hoz$ divisorum: quibus substitutis habebitur $y=p+\frac{q}{r}x$. et quoniam aequatio haec, daris p , q et r facile construi potest, putat se satisfecisse aequationis pro-

* In Exercit. Mathem. p. 210.

positae constructioni; aliud enim nihil, praeter haec quae dicta sunt, pro Compositione, hoc est constructione et demonstratione Loci propositi affert Schootenius. atque sic qui viam hanc sequuntur, puerilibus hisce operationibus, sibi et in Geometria Tyronibus illudunt. Sed praeterquam quod aequatio haec, eique similes *ἀγεμετρικαί* prorsus sunt, quis non videt multo difficilius fore invenire ipsas p, q, r geometricè, ut earum ope aequatio construatur, quam aequationem ipsam invenire; Canonem autem $y = p + \frac{1}{2}x$ nihil ad eas inveniendas conducere? idemque censendum est de Canonibus quos tradunt Locorum ad circulum et Locorum solidorum constructioni inservientibus. Qui vero tantum hisce calculis algebraicis assueti sunt, nunquam, nisi fortuito, vel Theorematum demonstrationes, vel Problematum et Locorum solutiones naturales et elegantes exhibere valebunt. Et quidem plus auxilii tum ad Analysin tum ad compositionem Geometricam, ex Propositionibus quae in praedictis Veterum libris Analyticis continebantur, quam ex omnibus Algebrae praeceptis, jure expectandum est.

Quae sequuntur Graeca ex Praefatione Pappi Alexandrini ad Lib. 7. Collect. Mathem. quam Apollonii duobus de sectione Rationis libris praefixit Clariss. Halleius, cum duobus MSS. in Bibliotheca Regia Parisiensi accurate contulit Dominus Jacobus Moor, tum in Mathesi, tum in literis Graecis, quas in hac Academia profitetur, multum et feliciter versatus. Ope vero horum quaedam in melius mutata sunt, quae ad imam paginam notantur. Alter Codex est is qui numeratur 2368, reliquus 2440.

ΤΟΠΩΝ ΕΠΙΠΕΔΩΝ β.

Τῶν τόπων καθόλου οἱ μὲν εἰσὶν ἐφεκτικοί, ὅς κ' Ἀπολλώνιος πρὸ τῶν
ἰδιῶν^α στοιχείων λέγει σημείων μὲν τόπον σημείων, γραμμῆς δὲ τόπον γραμμῆν,
ἐπιφανείας δὲ ἐπιφάνειαν, σφαιρῶν δὲ σφαιρῶν· αἱ δὲ διεξοδικοί, ὡς σημείων μὲν γραμ-
μῆν, γραμμῆς ἐπιφάνειαν, ἐπιφανείας δὲ σφαιρῶν· οἱ δὲ ἀναστροφικοί, ὡς σημεί-
ων μὲν ἐπιφάνειαν, γραμμῆς δὲ σφαιρῶν. τῶν δὲ ἐν τῷ ἀναλυομένῳ, οἱ μὲν τῶν
δέσει δεδομένων ἐφεκτικοί εἰσιν· οἱ δὲ ἐπίπεδοι λεγόμενοι, καὶ οἱ σφαιροὶ καὶ γραμμι-
κοὶ διεξοδικοί εἰσὶ σημείων. οἱ δὲ πρὸς ἐπιφανείας ἀναστροφικοί μὲν εἰσὶ σημείων,
διεξοδικοί δὲ γραμμῶν. οἱ μὲν τοὶ γραμμικοὶ ἀπὸ τῶν πρὸς ἐπιφάνειαν δείκνυν-
ται. λέγονται δὲ ἐπίπεδοι μὲν τόποι ὅτε περὶ ὧν ἐπάγομεν, καθόλου ὅσοι εἰ-
σὶν εὐθεῖαι γραμμαὶ ἢ κύκλοι· σφαιροὶ δὲ, ὅσοι εἰσὶ κώνων τομαί, παραβολαὶ ἢ
ἐλλείψεις, ἢ ὑπερβολαί· γραμμικοὶ δὲ τόποι λέγονται ὅσαι γραμμαὶ εἰσιν ὅτε
εὐθεῖαι, ὅτε κύκλοι, ὅτε τῶν εἰρημένων κωνικῶν τομῶν. οἱ δὲ ὑπὸ Εὐκλείδους
ἐπιγραφέντες τόποι πρὸς μεσότητας, ἐκ τῶν προειρημένων εἰσὶ τῶν γενεῶν ἀπὸ
δὲ τῆς ιδιότητος τῶν ὑποθέσεων* ἐκείνοις. οἱ μὲν ἔν ἀρχαῖοι τῶν ἐπιπέδων τόπων
τέττων τάξιν ἀποβλέπουσιν ἐστοιχείωσαν· ἢ ἀμελήσαντες οἱ μετ' αὐτοὺς προσέ-
θηκαν ἑτέρας, ὡς καὶ ἀπείρων τὸ πλῆθος ὄντων, εἰ δέλοι τις προσγράψαι καὶ
τῆς τάξεως ἐκείνης ἐχόμενα. θήσω ἔν τα μὲν προκείμενα ὕφερα, τὰ δὲ^β τῆς
τάξεως πρότερα, μίαν περιλαβὼν προτάσει ταύτην. Εάν δύο εὐθεῖαι, ἀχθῶσιν^γ
ἢ τοι ἀπὸ ἐνὸς δεδομένου σημείου ἢ ἀπὸ δύο, καὶ ἢ τοι ἐπ' εὐθείας ἢ παράλληλοι,
ἢ δεδομένην περιέχουσαι γωνίαν, καὶ ἢ τοι λόγον ἔχουσαι πρὸς ἀλλήλας, ἢ χω-
ρίον περιέχουσαι δεδομένον· ἀπλήται δὲ τὸ τῆς μίας πέρας ἐπιπέδου τόπος δέ-
σει δεδομένον, ἀφεται καὶ τὸ τῆς ἑτέρας πέρας ἐπιπέδου τόπος δέσει δεδομένον,
ὅτε μὲν τῷ ὁμογενῶς, ὅτε δὲ τῷ ἑτέρῳ· καὶ ὅτε μὲν ὁμοίως κειμένον πρὸς τὴν

^α Graeco textui Halleii additum est verbum ἰδιῶν ex praedictis MSS. Bibliothecae Regiae Parisiensis.
^β praedicti MSS. habent ἐκ τῆς τάξεως. ^γ MSS. praedicti recte omnino habent verbum ἀχθῶσιν quod
deest in impressis Halleii.

εὐθείαν, ὅτε δὲ ἐναντίως ταῦτα δὲ γίνεται παρὰ τὰς διαφορὰς τῶν ὑποκει-
μένων· τὰ δὲ προσκείμενα ἐν ἀρχῇ ὑπὸ Χαρμάνδου γ' συμφρονεῖ^d ταῦτα.
Εὰν εὐθείας τῷ μεγέθει δεδομένης τὸ ἐν πέρας ἢ δεδομένον, τὸ ἕτερον ἀφεται
δέσει δεδομένης περιφερείας κοίλης. Εὰν ἀπὸ δύο δεδομένων σημείων κλασθῶ-
σιν εὐθεῖαι δεδομένην περιέχουσαι γωνίαν, τὰ κοινὰ αὐτῶν σημεῖον ἀφεται δέ-
σει δεδομένης περιφερείας κοίλης. Εὰν τριγώνῳ χωρὶς μεγέθει δεδομένῃ ἡ βά-
σις δέσει καὶ μεγέθει δεδομένη ἢ, ἡ καρυφή αὐτοῦ ἀφεται δέσει δεδομένης εὐ-
θείας. ἕτερα δὲ τοιαῦτα. Εὰν εὐθείας τῷ μεγέθει δεδομένης, καὶ παρὰ τινα δέ-
σει δεδομένην εὐθεῖαν ἡγμένης, τὸ ἐν πέρας ἀπτήται δέσει δεδομένης εὐθείας,
ἀφεται καὶ τὸ ἕτερον εὐθείας δεδομένης. Εὰν ἀπὸ τινος σημείου ἐπὶ δέσει δε-
δομένας δύο εὐθείας, παραλλήλας ἢ συμπτύσσας, καταχθῶσιν ἐν δεδομέναις
γωνίαις ἢ τοὶ λόγον ἔχουσαι πρὸς ἀλλήλας δεδομένον· ἢ ὧν ἡ μία, μεθ' ἧς πέρας
ἦν ἡ ἑτέρα λόγον ἔχει δοθέντα, δεδομένη ἐστὶ· ἀφεται τὸ σημεῖον δέσει δεδο-
μένης εὐθείας. Καὶ εἰ ὧσιν ὅποσαι εὐθεῖαι δέσει δεδομένα, καὶ ἐπ' αὐτὰς
ἀπὸ τινος σημείου καταχθῶσιν εὐθεῖαι ἐν δεδομέναις γωνίαις, ἢ δὲ τὸ ὑπὸ δο-
θείσης καὶ κατηγμένης, μετὰ τῷ ὑπὸ δοθείσης καὶ ἑτέρας κατηγμένης, ἴσον τῷ
ὑπὸ δοθείσης καὶ ἑτέρας κατηγμένης, καὶ τῶν λοιπῶν ὁμοίως, τὸ σημεῖον ἀφε-
ται δέσει δεδομένης εὐθείας. Εὰν ἀπὸ τινος σημείου ἐπὶ δέσει δεδομένας πα-
ραλλήλας καταχθῶσιν εὐθεῖαι ἐν δεδομέναις γωνίαις, ἢ τοὶ ἀποτέμνουσαι
πρὸς τοῖς ἐπ' αὐτῶν δοθείσι σημείοις εὐθείας, λόγον ἔχουσαι δοθέντα, ἢ χω-
ρίον περιέχουσαι δεδομένον, ἢ ὥς τὰ ἐπ' αὐτῶν τῶν κατηγμένων δεδομένα εἴ-
δη, ἢ τὴν ὑπεροχὴν τῶν εἰδῶν ἴσην εἶναι δεδομένῳ χωρίῳ, τὸ σημεῖον ἀφεται
δέσει δεδομένης εὐθείας.

Τὸ δὲ δεύτερον βιβλίον περιέχει τὰδε. Εὰν ἀπὸ δύο δεδομένων σημείων
εὐθεῖαι κλασθῶσιν, καὶ ἢ τὰ ἀπ' αὐτῶν δοθέντι χωρίῳ διαφέροντα, τὸ σημεῖ-
ον ἀφεται δέσει δεδομένης εὐθείας. Εὰν δὲ ὧσιν ἐν λόγῳ δοθέντι, ἢ τοὶ εὐθείας

^d ex praedictis MSS. positum est συμφρονεῖ vice συμφρονεῖ in impressis. e Ita necessitate coacti mutavi-
mus, in impressis enim Halleii, ut et in MSS. praedictis, legitur ἀποτέμνουσαι πρὸς τοῖς ἐπ' αὐτῶν δοθείσι ση-
μείοις εὐθείας, ἢ τοὶ λόγον ἔχουσαι δοθέντα ἢ χωρίον περιέχουσαι, quae si manerent, Locus horum secundus non es-
set Locus planus, sed solidus ad Hyperbolam.

ἢ περιφερείας. Εάν ἡ Δέσει δεδομένη εὐθεΐα, καὶ ἐπ' αὐτῆς δοθέν σημεῖον, καὶ ἀπὸ τῆς διαχθείσας τις πεπερασμένη, ἀπὸ δὲ τῆς πέρατος ἀχθῇ πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τὴν Δέσει δεδομένην, καὶ ἡ τὸ ἀπὸ τῆς διαχθείσης ἴσον τῷ ὑπὸ δοθείσης καὶ ἡς ἀπολαμβάνει, ἦτοι πρὸς τῷ δοθέντι σημείῳ, ἢ πρὸς ἑτέρῳ δοθέντι σημείῳ ἐπὶ τῆς Δέσει δεδομένης, τὸ πέρας τῆς δεῖται Δέσει δεδομένης περιφερείας. Εάν ἀπὸ δύο δοθέντων σημείων εὐθεΐαι κλασθῶσιν, καὶ ἡ τὸ ἀπὸ τῆς μιᾶς τῆς ἀπὸ τῆς ἑτέρας δοθέντι μείζον ἢ ἐν λόγῳ, τὸ σημεῖον δεῖται Δέσει δεδομένης περιφερείας. Εάν ἀπὸ ὁσωνῶν δεδομένων σημείων κλασθῶσιν εὐθεΐαι πρὸς ἐνὶ σημείῳ, καὶ ἡ τὰ ἀπὸ πασῶν εἶδη ἴσα δοθέντι χωρίῳ, τὸ σημεῖον δεῖται Δέσει δεδομένης περιφερείας. Εάν ἀπὸ δύο δοθέντων σημείων κλασθῶσιν εὐθεΐαι, ἀπὸ δὲ τῆς σημείας παρὰ τὴν Δέσει ἀχθείσα εὐθεΐα ἀπολαμβανομένη ἀπὸ Δέσει δεδομένης εὐθείας πρὸς δοθέντι σημείῳ· καὶ ἡ τὰ ἀπὸ τῶν κεκλασμένων εἶδη ἴσα τῷ ὑπὸ δοθείσης καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης, τὸ πρὸς τῇ κλάσει σημείον δεῖται Δέσει δεδομένης περιφερείας. Εάν ἐντὸς κύκλου Δέσει δεδομένης δοθέν τι σημεῖον ἢ, καὶ δι' αὐτῆς ἀχθῇ τις εὐθεΐα, καὶ ἐπ' αὐτῆς ληφθῇ τὸ σημεῖον ἐκτός· καὶ ἡ τὸ ἀπὸ τῆς ἀχθῆς τῆς δοθέντος ἐντὸς σημείας, ἴσον τῷ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ τῆς ἐκτός ἀπολαμβανομένης, ἢ τὸ μόνον, ἢ τῆς τε καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ἐντὸς δύο τμημάτων, τὸ ἐκτός σημείον δεῖται Δέσει δεδομένης εὐθείας. Καὶ εάν τῆς μὲν σημείον ἀπτηται Δέσει δεδομένης εὐθείας, ὁ δὲ κύκλος μὴ ὑπόκειται, τὰ ἐφ' ἑκατέρῃ τῆς δεδομένης σημείας δεῖται Δέσει δεδομένης περιφερείας τῆς αὐτῆς. ἔχει δὲ τὰ τόπων ἐπιπέδων δύο βελία θεωρήματα ἦτοι διαγράμματα ρμζ', λήμματα δὲ ὁκλώ.

f Ratio hujus mutationis reddita est in pagg. 194. 195. In impressis enim et MSS. legitur τῷ μόνον, ἢ τῷ τε καὶ τῷ.

sunt rectae lineae vel circulares. Solidi vero quotcunque sunt Coni sectiones, Parabolae sc. aut Ellipses, aut Hyperbolae. Lineares denique Loci vocantur quotcunque lineae neque rectae sunt, neque circulares, neque quaequam dictarum Sectionum Conicarum. Quae vero ab Eratosthene Loci ad Medietates dicuntur, ejusdem sunt generis cum praedictis, specie autem, a propria hypothesium natura *ab illis distinguuntur*.

Veteres igitur, in Locis hisce Planis, ordinem respicientes, Elementa tradiderunt, quem negligentes posteriores alios adjecerunt, quasi Loci multitudine infiniti non sint, si velit quis adscribere quae ex hoc ordine non pendent *. Ponam igitur ea quae adjecta sunt posteriora, quae vero ordinem habent priora, *quae una hac propositione complectar*.

Si ducantur duae rectae lineae, vel ab eodem dato puncto, vel a duobus, quae vel sint in linea recta, vel parallelae, vel datum contineant angulum; et *ductae* vel datam inter se habeant rationem, vel datum comprehendant spatium: tangat autem terminus unius Locum planum positione datum: tanget et alterius terminus Locum planum positione datum, interdum quidem ejusdem generis, interdum vero diversi; in-

ris ad AB, fore FG duplam ipsius GA, quia est FG ad GA, ut EC ad CA; nullumque punctum extra rectam AE intra praedictos angulos, posse idem facere. Quoniam igitur omnia haec puncta sita sunt in recta AE, recta haec proprie vocatur Locus horum punctorum. Rursus, si ad rectam AB positione et magnitudine datam, ducatur perpendicularis EC, liquet in hac posse invenire punctum D quod faciat quadratum ex DC aequale rectangulo ACB contento segmentis ipsius AB; et similiter poterit in unaquaque recta perpendiculari ad AB, inveniri punctum quod idem praestabit. Si autem circulus describatur super diametrum AB, patet, ex natura circuli, punctum quodvis in ipsius circumferentia, ut punctum F, nullumque punctum extra aut intra circumferentiam, idem facere quod punctum D. Unde circumferentia haec recte vocatur Locus omnium illorum punctorum. Quod si propositum sit invenire punctum quod utrisque hisce proprietatibus gaudeat, a quo sc. si ad rectam AB positione et magnitudine datam, ducatur perpendicularis, sit haec dupla segmenti inter ipsam et punctum A, quadratum vero ex ipsa aequale sit rectangulo contento segmentis inter eandem et puncta A, B; manifestum est punctum hoc, ob primam conditionem, necessario locari in recta AE, et, propter reliquam, idem locari in circumferentiam super diametrum AB; et propterea in ipsam intersectione F inventum iri. Atque hoc exemplo patet quo modo doctrina de Locis Problematum solutioni inservit.

* Sive, nulla hujus ordinis habita ratione, ut vertit Clariss. Halleius.

terdum similiter positum respectu rectae lineae, interdum contrario modo situm. haec autem fiunt propter differentias hypothesium.

Tria autem in principio (*Lacorum sc. Apollonii*) a Charmandro adjecta sunt hisce consona. viz.

Si rectae magnitudine datae unus terminus datus sit, alter tanget circumferentiam concavam positione datam.

Si a duobus datis punctis inflectantur rectae datam continentis angulum, commune earum punctum tanget circumferentiam concavam positione datam.

Si trianguli spatii magnitudine dati basis positione et magnitudine data sit, vertex ejus tanget rectam positione datam.

Alia autem sunt hujusmodi.

Si rectae magnitudine datae, et quae parallela ducta est cuidam positione datae rectae, unus terminus tangat positione datam rectam, tanget et alter rectam positione datam.

Si a quodam puncto ad duas rectas positione datas, parallelas vel sibi mutuo occurrentes, ducantur in datis angulis duae rectae, quae vel habent datam inter se rationem, vel quarum una, simul cum ea ad quam altera rationem habet datam, data est: tanget punctum rectam positione datam.

Et si fuerint quotcunque rectae positione datae, et ad ipsas a quodam puncto ducantur rectae in datis angulis; fitque rectangulum contentum data recta et una ducta, simul cum rectangulo a data et alia ducta, aequale rectangulo a data et alia (*tertia*) ducta; et sic de caeteris; tanget punctum rectam positione datam.

Si a quodam puncto ad positione datas duas parallelas ducantur rectae in datis angulis, quae vel abscindant, ad data in ipsis puncta, rectas rationem datam habentes; vel spatium datum comprehendant; vel

ita

ita ut datae super ipsas ductas species *simul*, vel specierum excessus aequalis sit dato spatio; punctum *illud* tanget rectam positione datam *.

Secundus autem liber haec continet.

Si a duobus datis punctis inflectantur rectae, et quadrata ex ipsis dato spatio differant, punctum *concurfus* tanget rectam positione datam. Si vero *ductae* sint in ratione data, tanget punctum *concurfus* vel rectam vel circumferentiam *positione datam*.

Si sit recta positione data, et in ipsa datum *sit* punctum, et ab hoc ducatur quaedam *recta* terminata, a *hujus* autem termino ducta sit perpendicularis ad *rectam* positione datam; et sit quadratum ex ducta aequale rectangulo contento data *recta*, et ea quam aufert vel ad ipsum datum punctum, vel ad aliud datum punctum in *recta* positione data: terminus hujus *ductae* tanget circumferentiam positione datam.

Si a duobus datis punctis inflectantur rectae, et sit quadratum ex una, quadrato ex altera, dato majus, quam in ratione; tanget punctum circumferentiam positione datam.

Si a quocunque datis punctis inflectantur rectae ad unum punctum, et sint species [†] ex omnibus *descriptae* aequales spatio dato; tanget punctum circumferentiam positione datam.

[†] i. e. figurae speciei datae.

Si a duobus punctis datis inflectantur rectae, a puncto autem *concurfus* ducatur recta parallela positione datae, quae auferat a recta positione data *segmentum* puncto dato adjacens; sintque species ex inflexis *simul* aequales rectangulo a data et abscissa; punctum *concurfus* tanget circumferentiam positione datam.

Si intra circulum positione datum, punctum aliquod datum sit, et per ipsum ducta sit recta quaevis, et in ea sumatur punctum aliquod extra

* Paragrapha haec in Graecis codicibus male se habet; unde et Fermatius tres posteriores ejus partes ut non sanas et commentitias rejicit; debuit autem solam partem secundam rejecisse. paucis autem mutatis omnia sano fiunt. Schootenius sensum Pappi recte in his explicavit.

circulum; fit autem quadratum ex recta intercepta inter puncta illa, aequale rectangulo contento tota et extra *circulum* abscissa, vel solum *sc. quadratum*, vel etiam hoc una cum rectangulo a duobus segmentis intra *circulum*: punctum extra *circulum* tanget rectam positione datam.

* Et si hoc quidem punctum tanget rectam positione datam, circulus autem non ponatur, puncta ad utrasque *puncti* dati partes, tangent eandem circumferentiam positione datam.

Habent autem Locorum planorum duo libri Theoremata sive Diagrammata CXLVII. Lemmata vero octo.

Hae sunt Propositiones quas, ut earum Casus et Determinationes, eisque inservientia Lemmata, in libris sequentibus restituere et demonstrare conati sumus secundum viam Analyticam et Syntheticam Geometris Veteribus familiarem. “ ἐμοὶ γὰρ τὶ τῶν μὴ εὐρημένων ἐξευρίσκειν, ὃ, τι καὶ εὐρεθὲν κρέσσον ἢ ἀνέξεύρετον, ξυνέσιος δοκέει ἐπιθύμημά τε καὶ ἔργον εἶναι. καὶ τὸ τὰ ἡμέτερα ἐς τέλος ἐξεργάζεσθαι ὡσαύτως.”

HIPPOCRATES Lib. de Arte

* Propositio ultima omnino est mutila, non enim ex iis quae in ea data sunt, ostendi poterit puncta tangere circumferentiam positione datam; ut sana reddatur, addendum est, “ Et si rectangulum a segmentis inter duos puncta et datum punctum, datum fuerit, quadratum vero ex segmento inter datum punctum et datam positione rectam, vel solum, vel adjuncto praedicto rectangulo dato, aequale fuerit rectangulo a segmentis inter rectam positione datam et duo puncta sumpta.”

Fermatius autem qui putat hanc ultimam, ut apud Pappum est, similis modo quo penultima ostendi posse, eam non examinasse videtur. Non autem operae praetium visum fuit ei inter Apollonii propositiones locum dare. quamvis jam emendata facile ostendi posset.

APOLLO.





APOLLO NIPERGAEI

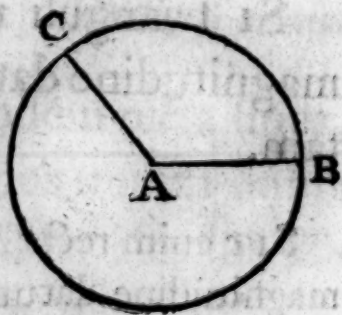
LOCORUM PLANORUM

LIBER PRIMUS.

PROPOSITIO I. *Charmandri.*

SI rectae lineae magnitudine datae terminus unus datus sit, alter terminus tanget concavam circumferentiam positione datam.

SIT enim AB magnitudine data, datumque sit punctum A ; circulus centro A intervallo AB descriptus positione et magnitudine dabitur [Def. 6. datorum]. Et manifestum est hujus circumferentiam Locum esse quem tangit terminus cujusvis rectae quae a puncto A , ipsi AB aequalis ducitur. Et contra, rectam quamcunque a centro A ad circumferentiam ductam, aequalem esse ipsi AB .



A

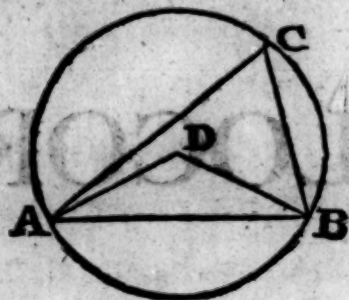
PROP.

PROP. II.

Charmandri.

Si a duobus punctis datis inflectantur rectae datum angulum continentes, commune earum punctum tanget circumferentiam concavam positione datam.

DATA enim sint A, B puncta, et inflectantur rectae AC, BC continentes angulum ACB aequalem dato angulo; et circa triangulum ACB descripto circulo, sit ejus centrum D; et AB, AD, BD jungantur. Quoniam igitur datus est ACB angulus, dabitur ejusdem duplex sc. angulus ADB ad centrum, et data est ratio AD ad BD, aequales enim sunt; quare specie datum est triangulum ADB [41. dat.] data igitur est ratio AB ad AD; et data est AB, quare AD magnitudine data [2. dat.]; sed et positione, propter AB positione datam punctumque A, et angulum BAD datum [29. dat.], quare punctum D datum est [27. dat.]. Ergo circulus centro D intervallo DA descriptus positione et magnitudine datus est [6. def. dat.]. Compositio autem eadem est cum constructione et demonstratione 33. 3. Elem. Eucl. describatur sc. super AB segmentum circuli capiens angulum aequalem dato angulo, erit hujus circumferentia locus quaesitus, ut patet.



PROP. III.

Charmandri.

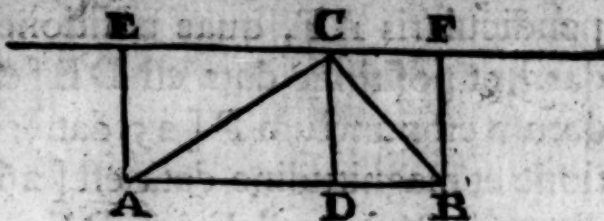
Si trianguli magnitudine dati, basis quoque positione et magnitudine data sit; vertex ejus tanget rectam positione datam.

SIT enim recta AB positione et magnitudine data, et triangulum ABC magnitudine datum: tanget vertex C rectam positione datam.



Ad

Ad AB ducatur perpendicularis CD, et compleatur parallelogrammum ADCE. quoniam igitur magnitudine datum est spatium ACB, dabitur ipsius duplum rectangulum sc. contentum ab ipsis AB, CD seu rectangulum EAB; et data est AB magnitudine, et angulus BAE; quare [57. dat.] magnitudine data est AE; sed et positione [29. dat.]; Ergo punctum E datum [27. dat.], et propterea recta EC, quam tangit punctum C, positione data est [28. dat.].



Componetur ita: ad rectam AB applicetur rectangulum AEFB aequale duplo spatii dati, et producat utrinque recta EF, erit haec locus quaesitus. nam a quovis in ipsa puncto C ductis CA, CB, erit triangulum ACB aequale dimidio rectanguli EB, hoc est spatium dato.

Propositio generalis Pappi, qua continentur, ut ex Pappo videtur, propositiones libri primi de Locis planis quae sunt ipsius Apollonii.

“ Si ducantur rectae duae, vel ab eodem dato puncto, vel a duobus; quae
 “ vel sint in linea recta, vel parallelae, vel datum contineant angulum; et
 “ ductae vel datam inter se habeant rationem, vel datum comprehendant spatium; tangat autem terminus unius locum planum positione datum; tanget
 “ etiam alterius terminus Locum planum positione datum, interdum quidem ejusdem generis, interdum vero diversi; interdum similiter positum respectu
 “ rectae lineae, interdum contrario modo situm.”

PROP. IV.

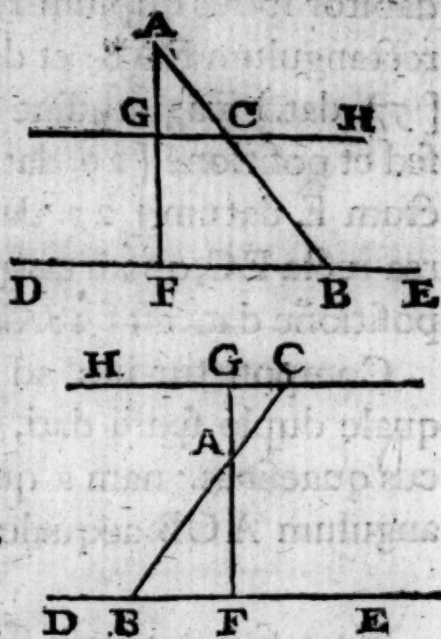
Apollonii prima.

Si a dato puncto ducantur duae rectae in eadem recta linea, habeantque datam inter se rationem; terminus autem unius tangat rectam positione datam; tanget terminus alterius rectam positione datam. Est 35. et 36. Datorum Euclid.

A dato

A dato puncto A in eadem recta linea sint AB, AC datam inter se habentes rationem, et tangat punctum B rectam DE positione datam; tanget etiam C rectam positione datam.

Ducatur enim a puncto A ad rectam DE perpendicularis AF, quae positione dabitur [30. dat.], et positione data est DE [ex hyp.] quare datum est punctum F [25. dat.]; ergo AF positione et magnitudine data est [26. dat.]: per C ducatur CG parallela ipsi DE; erit igitur AF ad AG, ut AB ad AC quae ex hypothesi datam inter se habent rationem; quare data ratio AF ad AG; et data est AF magnitudine, quare et AG; sed et positione data AG, et punctum A; ergo datum est punctum G [27. dat.]; et propterea recta GC quam tangit punctum C positione data est [28. dat.].



Componetur ita: ducatur AF ad DE perpendicularis, et in ipsa sumatur AG ad quam AF datam habet rationem, et per G ducatur GH parallela rectae DE; erit haec Locus quaesitus: Etenim si ad DE ducatur quaevis AB occurratque ipsi GH in C, erit AB ad AC, ut AF ad AG, hoc est in data ratione.

PROP. V.

Si a dato puncto A ducantur AB, AC in eadem recta linea datamque inter se habentes rationem; tangat autem B terminus unius circumferentiam positione datam; tanget etiam C terminus alterius circumferentiam positione datam, similiterque positam, hoc est convexam vel concavam prout illa quam B tangit convexa vel concava fuerit.

SIT enim D centrum circuli cujus circumferentiam tangit punctum B, et junctae DB parallela ducatur CE quae occurrat junctae AD in E. Quoniam

Componetur vero ita.

B

EtO

Et si A ducta, eodemque modo idem ostendetur si A fuerit in circum-
 ferentia circuli cuius cen-
 trum D. Secundo sit
 punctum A extra circu-
 lum cuius centrum est D,
 et ducatur AH ipsum
 contingens in H, ad eaf-
 dem partes ipsius AD ad
 quas est AB; et junctae
 DH ducatur EK paral-
 lela occurrens circulo cu-
 jus centrum est E in K.
 Et quoniam est AD ad
 AE, ut (DF ad EG, hoc
 est) DH ad EK, et pa-
 rallelae sunt DH, EK;
 in recta linea sunt A, H,
 K puncta *. rectus au-
 tem est angulus DHA
 [18. 3.], quare rectus est EKA; et propterea AK contingit circulum
 GK, quaevis igitur
 recta AB secans cir-
 culum FH, hoc est
 cadens inter AD et
 AH, cadet etiam
 inter AE et con-
 tingentem AK hoc C
 est secabit circulum
 GK in puncto quo-
 dam C. In utroque
 vero casu quoniam D, E. centra sunt circulorum erit DB ad EC, ut
 (DF ad EG, hoc est ex constructione ut) AD ad AE; et in triangu-

* Patet hoc ex 26. 6 vel 32. 6.

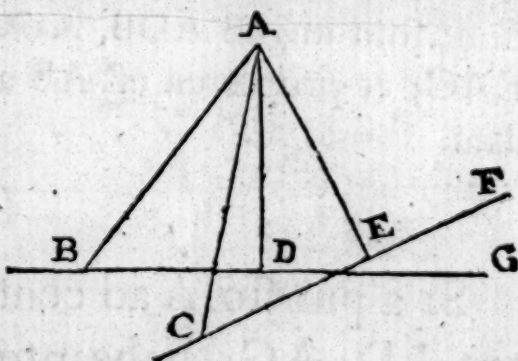
lis ADB, AEC quae communem vel aequalem habent angulum ad A, sunt anguli ABD, ACE simul vel minores, vel non minores recto; (utraque enim AB, AC ducenda est vel ad partes convexas vel concavas circulorum) quare per 7. 6. aequalis est angulus ADB angulo AEC, ideoque est AB ad AC, ut AD ad AE, hoc est in ratione data.

PROP. VI.

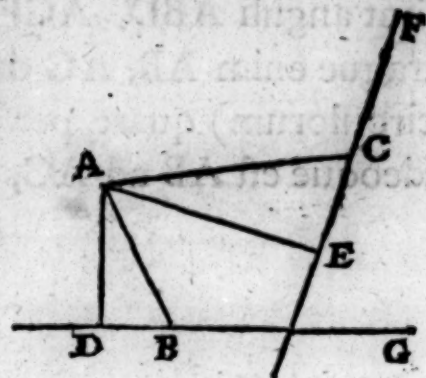
SI a dato puncto ducantur duae rectae lineae datum continentes angulum, datamque inter se rationem habentes; tangat autem terminus unius rectam positione datam, tanget et terminus alterius rectam positione datam.

SIT datum punctum A, et ductae sint AB, AC datum continentes angulum BAC, datamque inter se habentes rationem; tangat autem punctum B rectam DG positione datam, tanget et punctum C rectam positione datam.

Ducatur enim ad BG recta AD in dato quovis angulo, puta recto, ADB; et fiat angulus DAE ipsi BAC aequalis, et sit ratio DA ad AE aequalis rationi quam habet BA ad AC; ut scilicet habeatur aliud punctum E in loco quaesito; junctaque CE producat. Quoniam igitur a dato puncto A ad rectam positione datam BG ducta est AD in angulo dato, positione dabitur AD [30. dat.]; quare datum est punctum D [25. dat.], ipsaque AD positione et magnitudine [26. dat.]; et data est ratio AD ad AE, quare [2. dat.] magnitudine data est AE; sed et positione, propter AD positione datam, et punctum A, angulumque datum DAE [29. dat.]; datum igitur est punctum E [27. dat.]. Aequales autem sunt anguli DAE, BAC, quare addito vel ablato communi angulo, erit DAB angulus ipsi EAC aequalis



qualis. et quoniam est DA ad AE , ut BA ad AC , erit permutando DA ad BA , ut AE ad AC ; et sunt circa aequales angulos; aequiangula igitur sunt DAB , EAC triangula, et angulus AEC propterea aequalis est dato angulo ADB . Quoniam igitur a dato puncto E in recta positione data AE ducta est EC in angulo dato AEC , positione dabitur EC [29. dat.]. Tangit proinde punctum C rectam positione datam.



Componetur vero ita.

Ducatur a puncto A ad rectam positione datam DG quaevis recta AD , et fiat angulus DAE aequalis angulo dato, et sumatur AE ad quam AD datam habet rationem; per punctum vero E ducatur EF faciens angulum AEF aequalem angulo ADG , ita sc. ut sint ad easdem partes rectarum AE , AD : Erit recta EF Locus quaesitus, hoc est si a puncto A ducatur ad DG quaevis recta AB , et ad EF ducatur AC faciens angulum BAC aequalem ipsi DAE ; habebit AB ad AC eandem rationem quam AD ad AE . quoniam enim aequales sunt anguli DAE , BAC , erunt et DAB , EAC aequales; et aequales ex constructione sunt anguli ADB , AEC ; Ergo aequiangula sunt triangula DAB , EAC ; et propterea est AB ad AC , ut AD ad AE , hoc est in ratione data.

LEMMA I.

Si a puncto A ad centra duorum circulorum ducantur rectae AD , AG ; habeantque ductae inter se eandem rationem quam habent semidiametri ED , FG ; et ducantur rectae AK , AL contingentes circulos ad easdem ipsorum partes, et AM , AN eosdem ad alteras partes contingentes: Erit uterque angulus KAL , MAN aequales angulo DAG rectis ad centra a puncto A ductis contento.

JUNGANTUR

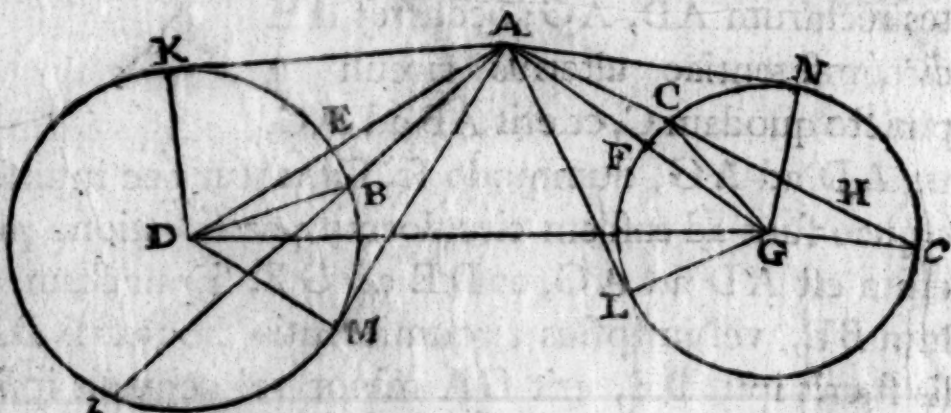
JUNGANTUR enim (*vid. fig. sequent.*) DK, GL; et quoniam in triangulis rectangulis [18. 3.] AKD, ALG ex hypothese est AD ad AG, ut DK ad GL, et permutando AD ad DK, ut AG ad GL; Erunt triangula haec aequiangula [7. 6.]. aequales igitur sunt anguli DAK, GAL, additoque communi DAL, aequales erunt anguli KAL, DAG; et similiter aequales ostendentur MAN, DAG.

PROP. VII.

Si a dato puncto ducantur duae rectae lineae datum continentes angulum, datamque inter se habentes rationem; tangat autem terminus unius circumferentiam positione datam, tanget et terminus alterius circumferentiam positione datam.

A DATO puncto A ductae sint AB, AC datum continentes angulum BAC, datamque inter se rationem habentes; tangat autem punctum B circumferentiam positione datam circuli sc. cujus centrum est D, tanget etiam punctum C circumferentiam positione datam.

Junctis AD, BD ducatur AF faciens angulum DAF aequalem dato angulo BAC, et ad AF ducatur CG faciens angulum ACG aequalem ipsi ABD. quoniam igitur aequales sunt anguli DAG, BAC aequales erunt DAB, GAC; et aequales sunt ABD, ACG, quare aequiangula sunt triangula ABD, ACG. Est igitur DA ad AG, ut AB ad AC; et data est ratio AB ad AC, quare data est ratio DA ad AG; data autem magnitudine est DA, propter data puncta A, D; quare et AG magnitudine data est,



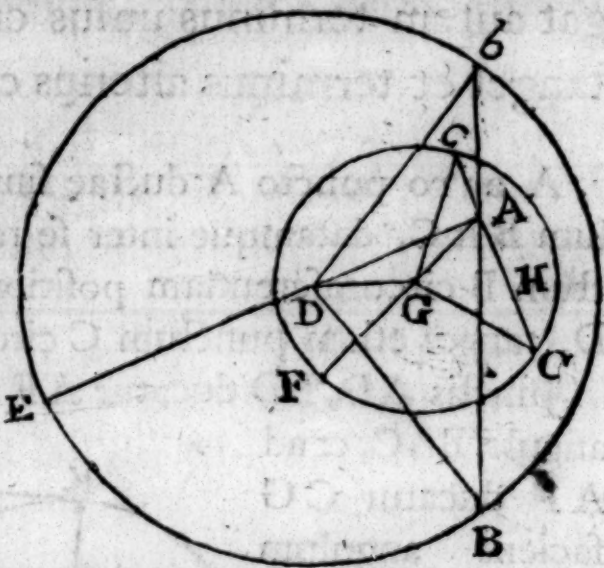
C

sed

sed et positione [29. dat.]; datum propterea est punctum G. Et propter aequiangularia triangula est BD ad CG, ut AB ad AC; data igitur est ratio BD ad CG; et data est BD magnitudine, quare et CG. Quoniam igitur a dato puncto G ducta est GC magnitudine data, tanget punctum C circumferentiam positione datam, per Prop. 1. hujus.

Componetur vero ita.

A dato puncto A ducatur AD ad centrum circuli positione dati, occurratque circumferentiae in E, et ducatur AF faciens angulum DAF aequalem angulo dato, ita sc. ut ad quas partes rectae AB ducenda est AC, sit AF ad easdem partes rectae AD; et in AF sumatur AG ad quam AD datam habet rationem; ut vero AD ad AG, ita fiat DE ad GF, et centro G intervallo GF describatur circulus: Erit hujus circumferentia Locus quaesitus, sc. si a puncto A ducatur ad circumferentiam cujus centrum est D recta quaevis AB, et ducatur AH faciens angulum BAH aequalem angulo DAG ita sc. ut AB, AH sint ad easdem partes rectarum AD, AG; occurret AH circumferentiae alterius circuli in puncto quodam C, et erit AB ad AC, ut AD ad AG, dummodo sc. sumantur eae intersectiones B, C vel *b*, *c* quae sunt ad easdem circulorum partes ratione puncti A. Quoniam enim est AD ad AG, ut DE ad GF, si punctum A fuerit intra circumulum BE, vel in ipsius circumferentia, hoc est si DA minor vel aequalis fuerit ipsi DE, erit GA minor vel aequalis ipsi GF, hoc est punctum A erit intra circumulum CF vel in ejus circumferentia, et propterea quaevis recta a puncto A ducta occurret circulo CF. Si vero punctum A fuerit extra circumulum BE, similiter ostendetur ipsum esse extra circumulum CF; et quoniam angulus BAH aequalis est angulo DAG, hoc est, per Lemma, angulo KAL contento rectis contingentibus



LIBER PRIMUS.

11

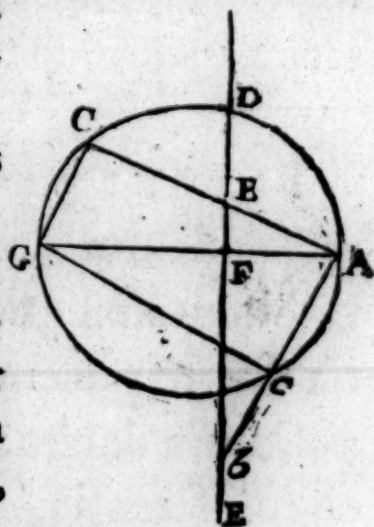
tibus circulos ad easdem ipsorum partes, et recta AB vel contingit circulum BE, vel inter rectas ipsum contingentes cadit, recta AH vel continget circulum CF, vel cadet inter rectas AL, AN quae ipsum contingunt; quare in omni casu AH occurret circulo CF: occurrat ei in C, et BD, CG jungantur. Quoniam igitur aequales sunt DAG, BAC anguli, aequales erunt DAB, GAC; et ex constructione est AD ad AG, ut DB ad GC, anguli vero ABD, ACG simul sunt vel minores vel non minores recto, Ergo [7. 6.] aequiangula sunt ABD, ACG triangula, ideoque est AB ad AC, ut AD ad AG, hoc est in data ratione.

PROP. VIII.

Si a dato puncto ducantur duae rectae lineae in eadem recta, datum continentes spatium; tangat autem terminus unus rectam lineam positione datam, tanget terminus alterius circumferentiam positione datam.

A dato puncto A ducantur AB, AC in eadem recta linea, datum rectangulum BAC continentes; et tangat punctum B rectam lineam DE positione datam, tanget punctum C circumferentiam positione datam.

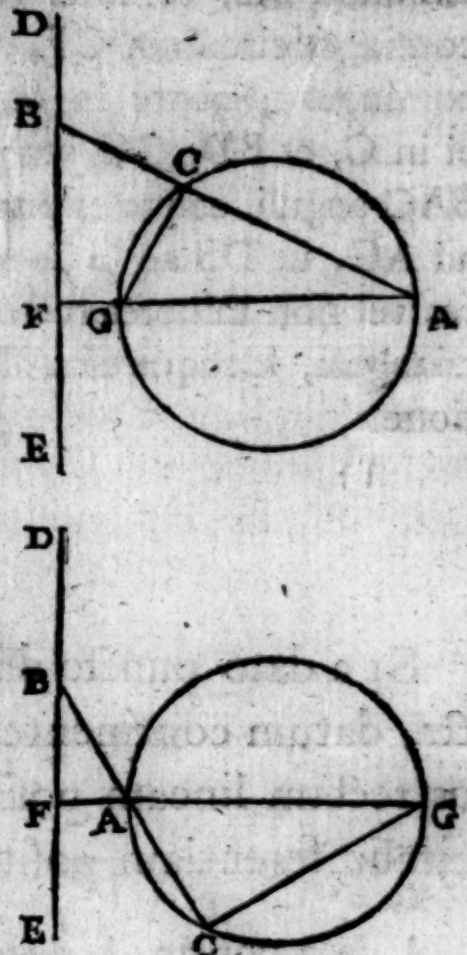
A puncto A ducatur ad DE perpendicularis AF, et in AF inveniatur punctum G in quo Locus punctorum C occurrit ipsi AF, hoc est fiat rectangulum FAG aequale dato spatio; datum igitur est punctum G, data enim est AG propter datam AF, [57. dat.]; et quoniam rectangulum BAC eidem dato spatio ex hypothese aequale est, Erunt BAC, FAG rectangula inter se aequalia; quare BA est ad AF, ut AG ad AC; juncta igitur CG aequiangula erunt triangula BFA, GCA [6. 6.]; ergo est angulus ACG aequalis angulo



angulo AFB recto. Quoniam igitur a datis punctis A, G inflexae sunt AC, GC datum continentes angulum, tanget punctum C circumferentiam positione datam, per Prop. 2. hujus.

Componetur vero ita.

Ad datam positionem rectam DE ducatur perpendicularis AF in qua sumatur punctum G quod faciat rectangulum FAG aequale spatio dato, et super diametrum AG describatur circulus; Erit hujus circumferentia Locus quaesitus. ducatur enim a puncto A quaevis AC circumferentiae occurrens in C, et rectae DE in B, et CG jungatur. Est igitur angulus ACG in semicirculo aequalis recto angulo AFB, aequiangula propterea sunt ACG, AFB triangula, Ergo ut AF ad AB, ita AC ad AG; quare rectangulum BAC aequale est ipsi FAG, hoc est spatio dato.

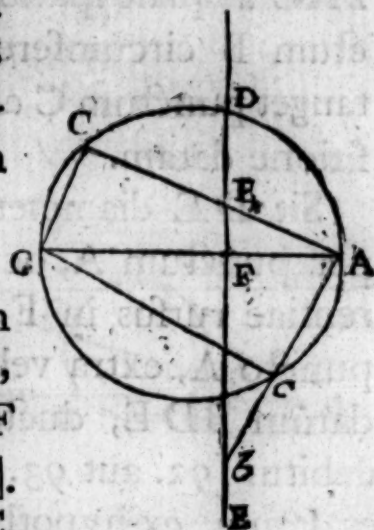


PROP. IX.

Si a dato puncto ducantur duae rectae lineae, in eadem recta, datum continentes spatium; et tangat terminus unius circumferentiam positione datam; si in hac circumferentia fuerit punctum datum, tanget terminus alterius rectam positione datam. Si vero punctum datum non fuerit in ea circumferentia, tanget terminus alterius aliam circumferentiam positione datam.

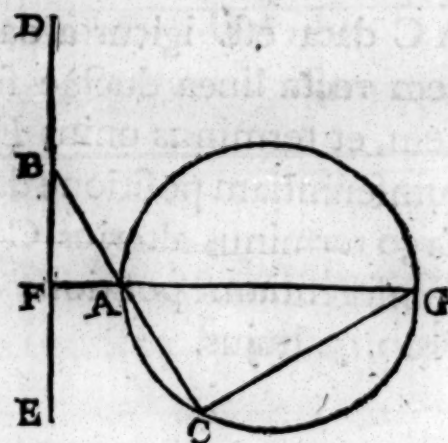
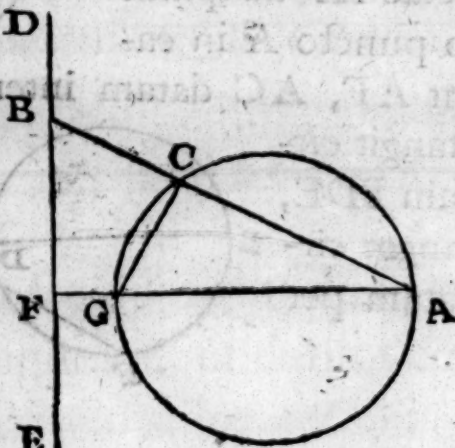
Cas. I.

Cas. 1. SIT datum punctum A in circumferentia positione data, circuli sc. cujus diameter est AG, quae propterea positione et magnitudine dabitur; et a puncto A exeant AC, AB in eadem recta linea continentes rectangulum CAB dato spatio aequale: tangat autem C circumferentiam cujus diameter est AG, tanget punctum B rectam positione datam.



Jungatur enim CG, et in AG sumatur punctum F quod faciat rectangulum GAF aequale dato CAB, et propter datum latus GA dabitur reliquum AF [57. dat.]; quare datum est punctum F [27. dat.]. Est autem, propter aequalia rectangula, AG ad AC, ut AB ad AF, junctâ igitur BF, aequiangula erunt GAC, BAF trian-

gula; rectus autem est angulus ACG in semicirculo, quare rectus est AFB; et data est AF positione et punctum F, quare [29. dat.] positione data est BF; tangit propterea punctum B rectam



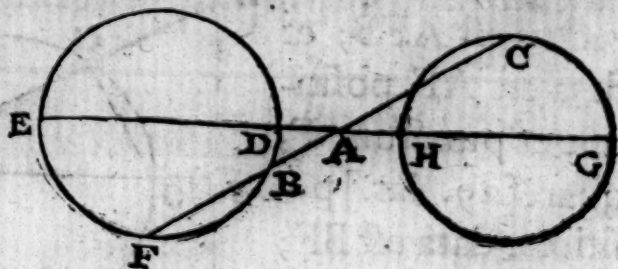
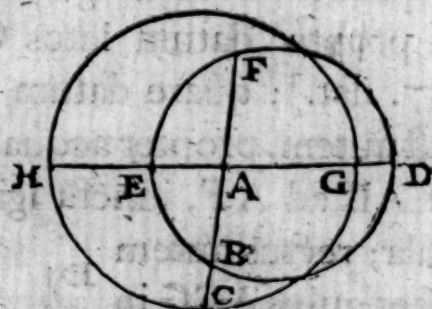
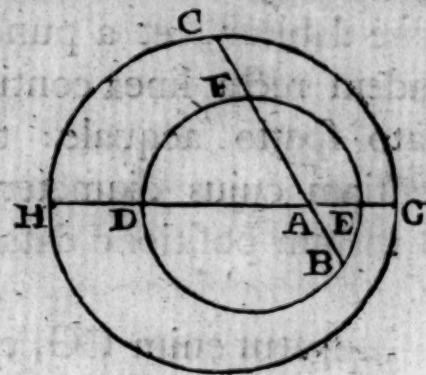
positione datam. Est haec conversa praecedentis, et patet compositio, faciendo sc. rectangulum GAF aequale dato spatio, et per punctum F ducendo rectam DFE ad rectos angulos ipsi AG.

D

Cas. 2.

Cas. 2. Non autem sit datum punctum A in circumferentia positione data; et ab ipso exeant rectae AB, AC continentes rectangulum BAC aequale spatio dato, tangat autem punctum B circumferentiam positione datam, tanget punctum C aliam circumferentiam positione datam.

Sit DE diameter circuli dati quae transsit per punctum A, occurratque AB circumferentiae rursus in F. Quoniam igitur a dato puncto A, extra vel intra circulum positione datum BDE, ducta est ABF ad circulum; dabitur [92. aut 93. dat.] rectangulum BAF. et datum, ex hypothesi, est BAC rectangulum; quare ratio ipsorum BAF, BAC data est [1. dat.], hoc est ratio rectae AF ad ipsam AC data est. igitur a dato puncto A in eadem recta linea ductae sunt AF, AC datam inter se habentes rationem, et terminus unius F tangit circumferentiam positione datam BDE, Ergo terminus alterius C tanget circumferentiam positione datam per Prop. 5. hujus.



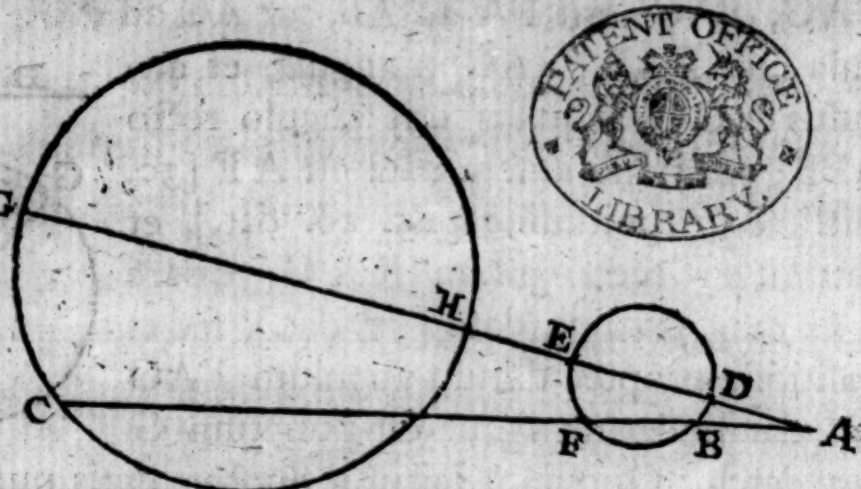
Componetur vero ita.

Sit DE diameter circuli positione dati quae transsit per punctum A; et fiat rectangulum DAG aequale spatio dato, ita scilicet ut puncta D, G cadant ad easdem vel contrarias partes puncti A prout puncta B, C ad easdem vel contrarias partes ejusdem puncti cadere ponuntur. Describatur vero, per Prop. 5. hujus, circulus HCG ita ut si a puncto A ducatur quaevis AF ad circulum DFE occurrat haec circulo HCG in puncto quodam C, faciatque AF ad AC in data ratione quam habet AE ad AG, hoc autem fiet faciendo ut AE ad AG, ita AD ad AH,

AH, et super GH diametrum describendo circulum; Erit hujus circumferentia Locus quaesitus. A puncto enim A ducatur ad circulum DE quaevis recta AB oc-

curratque eidem rursus in F, igitur ex constructione occurret AF circulo HG in quodam puncto C, et erit AF ad AC, ut AE ad AG; quare [1. 6.] rectangulum BAF est ad ipsum

BAC ut rectangulum DAE ad DAG rectangulum. aequalia autem sunt rectangula BAF, DAE [cor. 36. 3.] Ergo rectangulum BAC aequale est ipsi DAG, hoc est spatio dato. et manifestum est situm punctorum B, C contrarium esse ei quem habent puncta F, C.



PROP. X.

Si a dato puncto ducantur duae rectae lineae datum comprehendentes angulum, et datum continentes spatium; tangat autem terminus unius rectam positione datam, tanget terminus alterius circumferentiam positione datam.

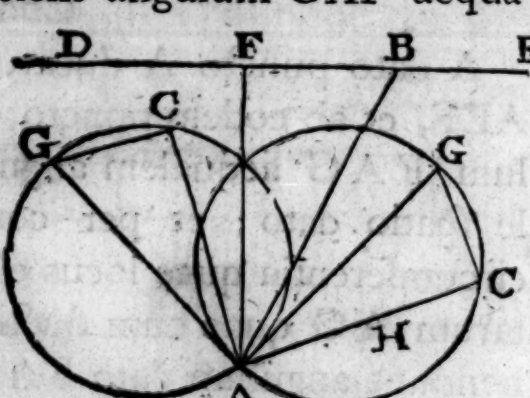
Datum sit punctum A, et ductae sint AB, AC datum comprehendentes angulum BAC, sitque datum rectangulum ipsis BA, AC contentum: tangat autem B rectam positione datam DE; tanget C circumferentiam positione datam.

Ducatur enim a puncto A ad rectam DE perpendicularis AF, et, ducta AG quae faciat angulum FAG aequalem angulo BAC et rectangulum FAG aequale rectangulo BAC, jungatur GC. Quoniam igitur

PROP. XI.

SI a dato puncto ducantur duae rectae lineae datum comprehendentes angulum, et datum continentes spatium, et tangat terminus unius circumferentiam positione datam; si in hac circumferentia fuerit punctum datum, tanget terminus alterius rectam positione datam. Si vero punctum datum non fuerit in ea circumferentia, tanget terminus alterius aliam circumferentiam positione datam.

Cas. 1. SIT datum punctum A in circumferentia positione data, circuli scil. cujus diameter est AG, quae propterea positione et magnitudine dabitur. et a puncto A ducantur rectae AC, AB datum facientes angulum CAB, et datum continentes spatium. Tangat autem C circumferentiam cujus diameter est AG, tanget punctum B rectam positione datam.

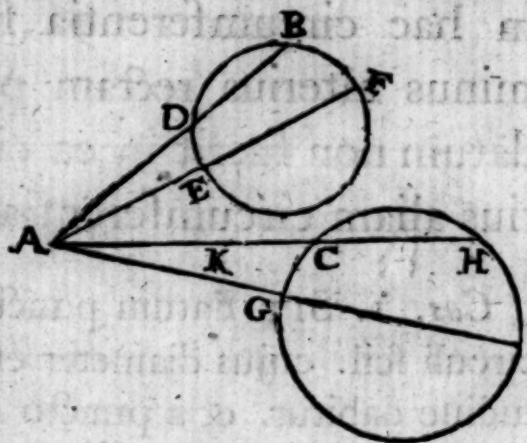
Jungatur enim CG, et ducatur AF faciens angulum GAF aequalem angulo CAB, et rectangulum GAF aequale ipsi CAB, ita ut AF, AB sint ad easdem partes rectarum AG, AC; et BF jungatur. Erunt igitur triangu-

 FAB, CAG aequiangula, et propterea angulus AFB aequalis angulo recto ACG. quoniam vero data est AG positione, datusque est CAB seu GAF angulus, et datum punctum A; dabitur positione recta AF [29. dat.]; sed et magnitudine, propter datam magnitudine rectam AG, datumque rectangulum GAF; datum igitur est F punctum, datusque est angulus rectus AFB, quare recta FB quam tangit punctum B positione data est. patet autem compositio, ducendo sc. rectam AF ut dictum fuit, et per F rectam FE ad rectos angulos ipsi AF.

E

Cas. 2.

Cas. 2. Non autem sit datum punctum A in circumferentia positione data; et ductae sint AB, AC datum comprehendentes angulum BAC, datumque continentes spatium: tangat autem B terminus circumferentiam BDE positione datam, tanget quoque C terminus aliam circumferentiam positione datam.

Occurrat enim AB circumferentiae rursus in D, et quoniam a dato puncto A ad circulum positione datum ducta est ADB, dabitur [92. aut 93. dat.] rectangulum BAD; datumque ex hypothesis est rectangulum BAC, quare [1. dat.] datur ratio rectanguli BAD ad ipsum BAC, hoc est datur ratio rectae AD ad AC. quoniam igitur a dato puncto A ductae sunt AD, AC datum comprehendentes angulum DAC, datamque inter se rationem habentes, terminus autem unius D tangit circumferentiam positione datam BDE, terminus C alterius tangit circumferentiam positione datam, per Prop. 7. hujus.



Componetur vero ita.

A dato puncto A ducatur per centrum circuli positione dati recta AEF, et ab eodem puncto ducatur recta AG quae faciat tum angulum FAG aequalem angulo dato, tum rectangulum FAG aequale spatio dato; et per compositionem Prop. 7. hujus describatur circumferentia quae locus est punctorum G quae sc. termini sunt rectarum AG quae cum ductis AE ad circumferentiam BDE comprehendunt angulum dato FAG aequalem, et ad quas rectae AE rationem habent aequalem rationi AE ad AG. Sit circumferentia descripta GCH, Erit haec Locus quaesitus, hoc est si ducatur quaevis AB a puncto A ad circulum BDE, et ab eodem puncto ducatur AK faciens angulum BAK aequalem ipsi FAG, occurret AK circulo GCH [ut patet ex Prop. 7. hujus] in punctis duobus C, H, eritque rectangulum BAC aequale dato rectangulo FAG, dummodo sc. sumantur eae rectarum ADB, ACH intersectiones cum circulis quae sunt ad ipsorum partes

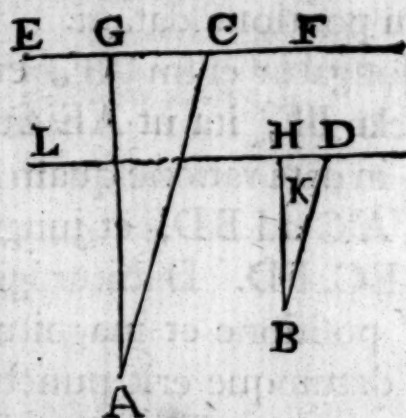
tes contrarias. Quoniam enim per constructionem [sc. per Prop 7. huius] est AD ad AC, ut AE ad AG, erit rectangulum BAD ad ipsum BAC, ut (AE ad AG, hoc est ut) rectangulum FAE ad ipsum FAG. Est autem BAD aequale rectangulo FAE, ergo et BAC aequale est ipsi FAG, hoc est spatium dato. Et quoniam ex eadem Prop. 7. est AD ad AC, ut AB ad AH, erit rectangulum DAH aequale ipsi BAC seu FAG, hoc est spatium dato.

PROP. XII.

Si a duobus punctis datis ducantur duae rectae lineae parallelae datam habentes rationem; tangat autem terminus unius rectam positione datam, tanget quoque terminus alterius rectam positione datam.

SINT A, B duo puncta data, et ab ipsis ducantur AC, BD parallelae datamque habentes rationem; tangat autem C rectam EF positione datam, tanget etiam D rectam positione datam.

Ducatur enim ad EF perpendicularis AG quae positione [30. dat.] et magnitudine [25. 26. dat.] dabitur. Et a puncto B ducta BH (ad utraque partes) parallelae ipsi AG, ita ut AG sit ad BH in data ratione quam habet AC ad BD, dabitur positione BH [28. dat.] sed et magnitudine [2. dat.] quare, propter punctum B datum, dabitur punctum H [27. dat.]. Jungatur DH, et quoniam parallelae sunt AG, BH; ut et AC, BD; aequales erunt anguli GAC, HBD. Et est AG ad BH, ut AC ad BD, aequiangula propterea sunt GAC, HBD triangula [6. 6.], et angulus BHD aequalis angulo recto AGC. Quoniam igitur a dato puncto H, in recta positione data BH, ducta est HD in dato angulo, positione dabitur HD [29. dat.] ideoque tangit punctum D rectam positione datam.



Componetur vero ita.

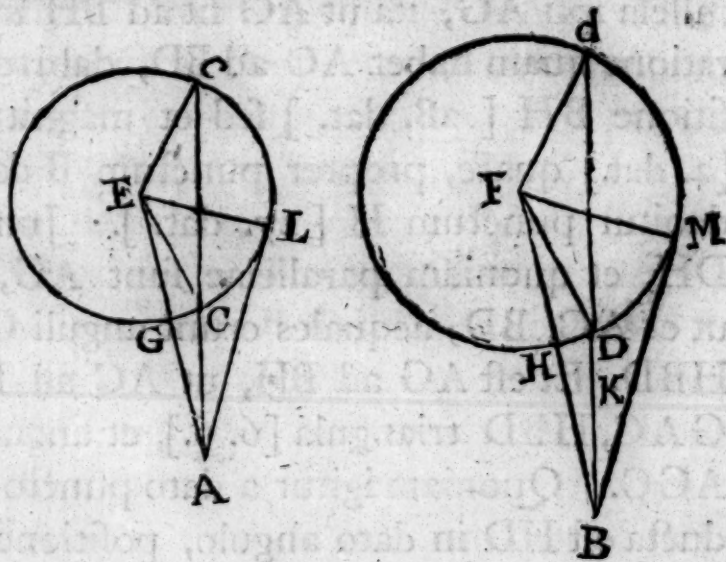
Ducatur ad EF perpendicularis AG, et ipsi per punctum B agatur parallela BK in qua sumatur BH ad quam AG datam habet rationem, et per H ducatur HL parallela ipsi EF; Erit haec Locus quaesitus, sc. si a punctis A, B ducantur ad EF, LH quaevis parallelae AC, BD, aequiangula erunt triangula GAC, HBD, quare est AC ad BD, ut AG ad BH, hoc est in ratione data.

PROP. XIII.

Si a duobus punctis datis ducantur duae rectae parallelae datamque habentes rationem; tangat autem terminus unius circumferentiam positione datam, tanget quoque terminus alterius circumferentiam positione datam.

DATA sint A, B puncta, et ab ipsis ducantur AC, BD parallelae datamque habentes rationem; tangat autem C circumferentiam circuli positione dati cuius centrum E, tanget quoque D aliam circumferentiam positione datam.

Jungatur enim AE, cui, ad utrasvis partes, ducatur a puncto B parallela BF, ita ut AE sit ad BF in data ratione quam habet AC ad BD, et jungantur EC, FD. Dabitur igitur BF positione et magnitudine, datumque erit punctum F; et aequiangula erunt AEC, BFD triangula, quae ut in praecedente ostenduntur, quare est EC ad FD, ut AC ad BD, hoc est in ratione data; et data est EC magnitudine, quare et FD [2. dat.]; et datum est punctum



punctum F; ergo tangit D circumferentiam positione datam per Prop. 1. hujus.

Componetur vero ita.

Jungatur AE circumferentiae occurrens in G, et a puncto B ducatur ipsi AE parallela, et in ipsa sumatur BF ad quam AE, et FH ad quam EG datam habet rationem; centroque F intervallo FH describatur circulus: Erit hujus circumferentia Locus quaesitus, hoc est si a puncto A ducatur quaevis AC, circumferentiae cujus centrum est E occurrens in C, c, et ipsi AC parallela ducatur BK; occurret haec circumferentiae cujus centrum est F in punctis duobus D, d; et erit AC ad BD in data ratione quam habet AE ad BF, sc. si sumantur puncta C, D vel c, d quae sunt ad easdem circulorum partes ratione punctorum A, B. Ducantur enim AL, BM circulos ad partes C, D contingentes, et jungantur EL, FM. Erunt triangula AEL, BFM aequiangula, quod prorsus ut in Lemmate 1^o ostenditur; aequales igitur sunt anguli EAL, FBM; et aequales sunt EAC, FBK anguli, propter AE, BF et AC, BD inter se parallelas; quoniam igitur AC cadit intra angulum EAL, cadet BK intra angulum FBM, et propterea circulo occurret; occurrat in D, d, et jungantur EC, FD. et quoniam ex constructione est AE ad BF, ut EG ad FH, hoc est EC ad FD, et in triangulis AEC, BFD aequales sunt anguli EAC, FBD, et reliqui ad C, D sunt vel simul minores vel non minores recto, erunt AEC, BFD triangula aequiangula [7. 6.] ideoque est AC ad BD, ut AE ad BF, hoc est in ratione data.

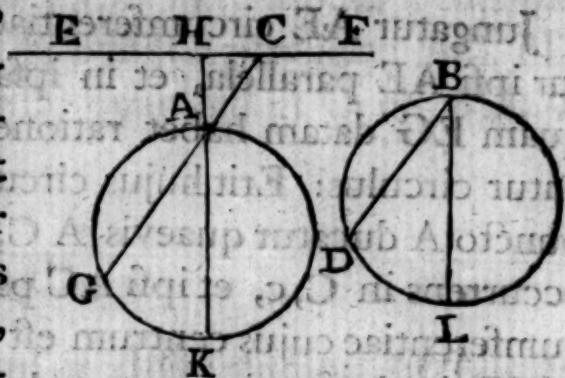
P R O P. XIV.

Si a duobus punctis datis ducantur duae rectae parallelae datum continentes spatium; tangat autem terminus unius rectam positione datam, tanget terminus alterius circumferentiam positione datam.

SINT

SINT A, B puncta data, et ab ipsis ducantur AC, BD parallelae, et datum continentes spatium; tangat autem C rectam EF positione datam, tanget D circumferentiam positione datam.

Sumatur enim in recta AC, ad utraque partes, recta AG aequalis ipsi BD. Et quoniam a dato puncto A ductae sunt AC, AG in eadem recta datum continentes spatium, et tangit C rectam positione datam, tanget G circumferentiam positione datam per Prop. 8. hujus. Et quoniam a duobus punctis datis A, B ductae sunt AG, BD parallelae datamque habentes rationem, aequales enim sunt, et tangit G circumferentiam positione datam, tanget D aliam circumferentiam positione datam per Prop. praecedentem.



Componetur vero facile ope compositionum Prop. 8. et praecedentis 13. sc. ducendo a puncto A ad rectam EF perpendicularem AH, et in ipsa sumendo punctum K quod faciat rectangulum HAK aequale spatio dato, et a puncto B ducendo BL parallelam et aequalem ipsi AK, et super diametrum BL describendo circulum; erit enim hujus circumferentia Locus quaesitus, hoc est si ducatur a puncto A ad rectam EF quaevis AC, et a puncto B recta parallela ipsi AC circulo BDL occurrens in D, erit rectangulum contentum AC, BD aequale ipsi HAK. Intelligatur enim circulus descriptus super diametrum AK cui occurrat AC in G; et, per Prop. 13. hujus, quoniam aequales sunt BL, AK, aequales erunt BD, AG. per Prop. vero 8. hujus rectangulum CAG, hoc est contentum ipsis CA, BD, aequale est rectangulo HAK, hoc est spatio dato.

PROP.



Si a duobus punctis ducantur duae rectae parallelae, datum continentes spatium, tangat autem terminus unius circumferentiam positione datam; si punctum datum a quo haec ducta est fuerit in ea circumferentia, tanget terminus alterius rectam positione datam. Si vero punctum illud non fuerit in ea circumferentia, tanget terminus alterius aliam circumferentiam positione datam. *Vide fig. praeced.*

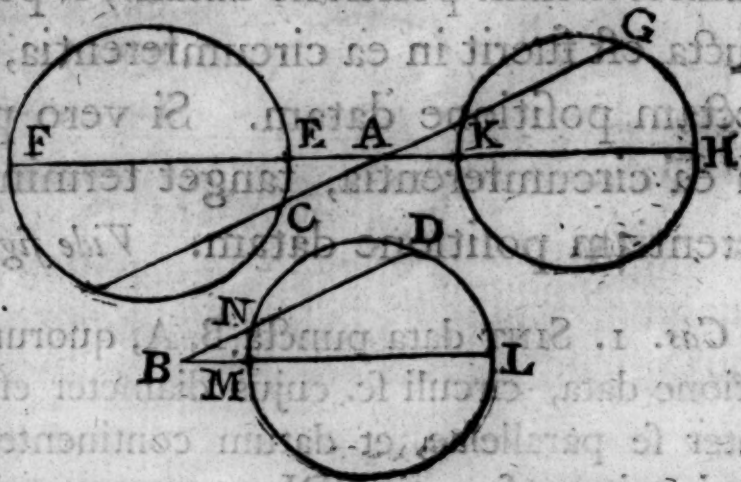
Cas. 1. SINT data puncta B, A, quorum B sit in circumferentia positione data, circuli sc. cujus diameter est BL, et ducantur BD, AC inter se parallelae, et datum continentes spatium; terminus vero D sit in circumferentia BDL; tanget terminus C rectam positione datam.

Sumatur enim in AC punctum G faciens AG aequalem ipsi BD, et per Prop. 13. hujus tanget punctum G circumferentiam positione datam, circuli sc. cujus diameter AK aequalis et parallela est ipsi BL. et quoniam a dato puncto A ductae sunt AC, AG in eadem recta, et datum continentes spatium, et est terminus G in circumferentia positione data in qua est A, tanget terminus C rectam positione datam per Prop. 9. hujus *Cas. 1.* Est haec conversa praecedentis, et compositio obvia est ex iis in Prop. 9. et 13. hujus, sc. ducendo AH parallelam ipsi BL quae faciat rectangulum contentum AH, BL, seu rectangulum HAK aequale spatio dato, et ducendo per H rectam EHF ad rectos angulos ipsi HA. ductis enim BD, AC parallelis, erit rectangulum BD, AC hoc est GAC aequale ipsi HAK, seu contento AH, BL, hoc est spatio dato.

Cas. 2.

Cas. 2. Sint A, B puncta data, et ab ipsis ducantur parallelae AC, BD datum continentes spatium, et tangat C circumferentiam positione datam cujus diameter quae transit per A est EF , non autem sit A in ea circumferentia; tanget etiam D aliam circumferentiam positione datam.

Sumatur enim in AC recta AG aequalis ipsi BD , et quoniam a dato puncto A ductae sunt AC, AG in eadem recta linea, et datum continentes spatium, et est terminus C in circumferentia positione data ECF , in eadem vero non est punctum A , tanget punctum G circumferentiam positione datam per *Cas. 2. Prop. 9. hujus.* Et quoniam a duobus punctis datis A, B ductae sunt AG, BD parallelae, datam habentes rationem, aequales enim sunt, et tangit G circumferentiam positione datam, tanget quoque D circumferentiam positione datam per *Prop. 13. hujus.*



Componetur vero ope compositionum *Cas. 2. Prop. 9. et Prop. 13. hujus, sc.* Sumatur in AF recta AH quae faciat rectangulum EAH aequale spatio dato, et ut AF ad AH , ita fiat AE ad AK ; per B vero ducatur recta parallela ipsi AH , in qua sumantur BL, BM aequales ipsis AH, AK , et super diametrum ML describatur circulus, erit huius circumferentia Locus quaesitus, a puncto enim A ducatur ad circulum ECF quaevis AC , cui a puncto B parallela ducatur BN , occurret haec circulo MDL in quodam puncto D , et rectangulum AC, BD aequale erit ipsi EAH ; describatur enim super diametrum KH circulus KGH , et per *Cas. 2. Prop. 9.* huic occurret recta AC in puncto quodam G ita ut rectangulum CAG aequale sit ipsi EAH . per *Prop. autem 13.* quoniam sc. BL, BM aequales sunt ipsis AH, AK in rectis parallelis, occurret BN circulo MDL in puncto quodam D ita

D ita ut aequalis sit BD ipsi AG, igitur rectangulum AC, BD (feu CAG) aequale est ipsi EAH, hoc est spatium dato.

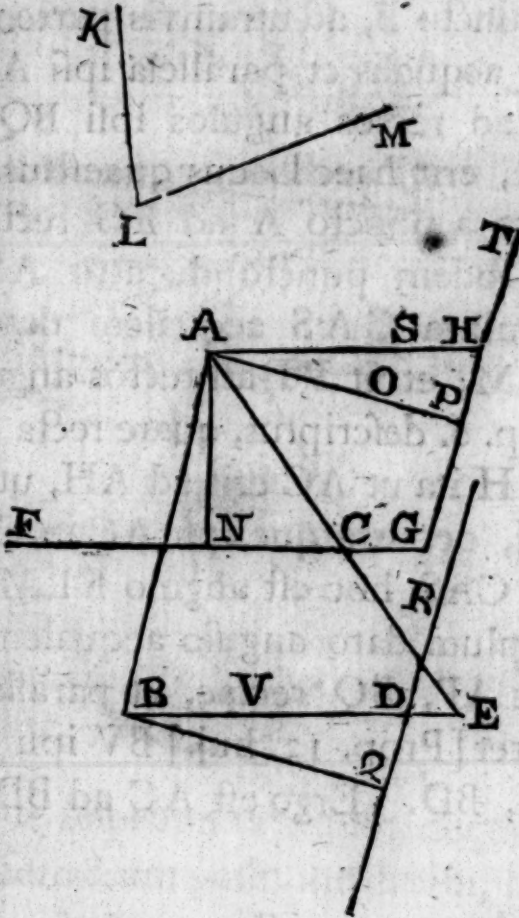
Patet vero non opus fuisse rectis AH, AK ad inveniendas ipsas BL, BM, et describendum circulum Localem MDL; sed ad compositionem perficiendam. idemque in sequentibus quibusdam observandum.

PROP. XVI.

Si a duobus punctis datis ducantur duae rectae lineae datum continentis angulum, et datam habentes rationem; tangat autem terminus unius rectam positione datam, tanget terminus alterius rectam positione datam.

SINT A, B puncta data, et ab ipsis ducantur AC, BD datum continentis angulum AEB, datamque habentes rationem; tangat autem C rectam FG positione datam, tanget quoque D rectam positione datam.

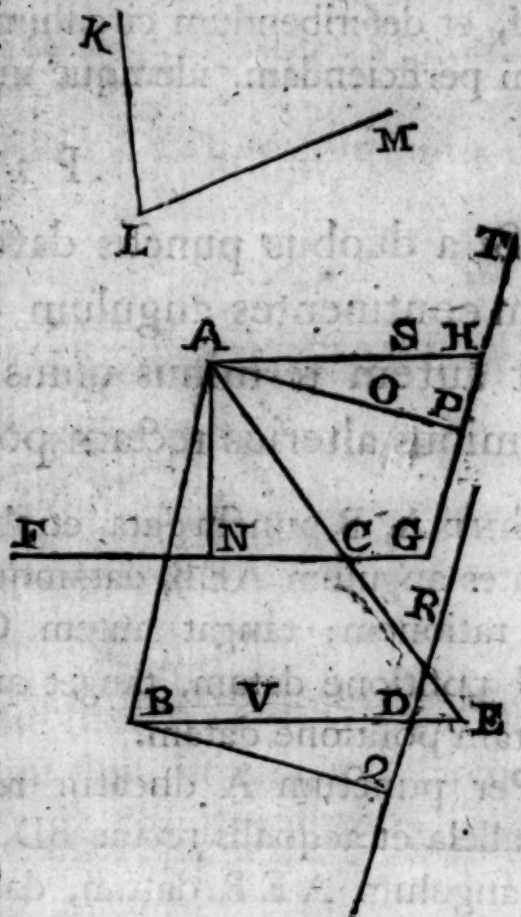
Per punctum A ducatur recta AH parallela et aequalis rectae BD, et propter angulum AEB datum, dabitur ipsi aequalis angulus CAH. Quoniam igitur a dato puncto A ductae sunt AC, AH datum continentis angulum, datamque habentes rationem, et tangit punctum C rectam positione datam, tanget quoque H rectam positione datam per Prop. 6. hujus. Et quoniam a duobus datis punctis A, B ductae sunt AH, BD inter se parallelae, datamque habentes rationem, aequales enim sunt, et tangit punctum H rectam positione datam, tanget etiam D rectam positione datam per Prop. 12. hujus.



F

Componetur

Componetur vero ope compositionum Prop. 6. et 12. ita. Sit datus
 angulus KLM, et data ratio quam ducenda a puncto A habere debet
 ad ducendam a puncto B, sit ea quam
 habet KL ad LM. et a puncto A ducatur
 ad FG perpendicularis AN, et AO
 quae faciat angulum NAO aequalem ip-
 si KLM, ad quas autem partes junctae
 AB ducenda ex hypothese est AE ut an-
 gulus AEB aequalis sit angulo KLM, ad
 easdem rectae AN ducenda est AO, po-
 terit enim requiri ut angulus AEB sit ad
 utramvis partem rectae AB. Sumatur ve-
 ro in AO recta AP ad quam habet AN
 rationem eandem quam KL ad LM, et
 a puncto B, ad utramvis partem ducatur
 BQ aequalis et parallela ipsi AP, et per
 Q ad rectos angulos ipsi BQ ducatur
 QR, erit haec Locus quaesitus. ducatur
 enim a puncto A ad FG recta AC, et
 ab eodem puncto ducatur AS faciens
 angulum CAS aequalem dato angulo
 KLM; et sit PT ad rectos angulos ipsi AP. Est igitur PT Locus in
 Prop. 6. descriptus, quare recta AS rectae PT occurret in quodam pun-
 cto H ita ut AC erit ad AH, ut KL ad LM. ducatur BV parallela ipsi
 AH, occurratque ipsi AC in E, et quoniam angulus BEA aequalis est
 ipsi CAS, hoc est angulo KLM, erit BE recta quae cum AC continet
 angulum dato angulo aequalem. quoniam vero aequales et parallelae
 sunt AP, BQ rectae, et parallelae sunt PT, QR ut et AH, BV, oc-
 curret [Prop. 12. huj.] BV ipsi QR in puncto D ita ut aequales erunt
 AH, BD. Ergo est AC ad BD, seu AH, ut KL ad LM.

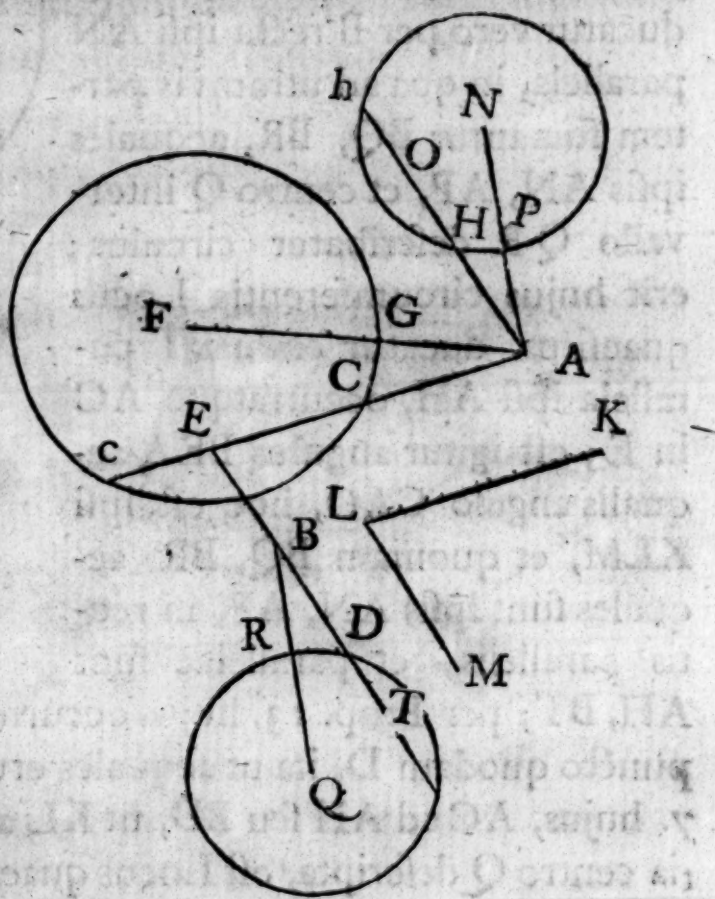


PROP. XVII.

Si a duobus punctis datis ducantur duae rectae lineae datum continentes angulum, datamque habentes rationem; tangat autem terminus unius circumferentiam positione datam, tanget terminus alterius circumferentiam positione datam.

SINT A, B puncta data, et ab ipsis ducantur AC, BD datum continentes angulum AEB, datamque habentes rationem; tangat autem C circumferentiam positione datam circuli sc. cuius centrum est F, et FG semidiameter quae transit per A; tanget etiam D circumferentiam positione datam.

Per punctum A ducatur AH parallela et aequalis ipsi BD, ita ut anguli AEB, CAH sint aequales, et propter angulum AEB datum dabitur angulus CAH. Quoniam igitur a dato puncto A ductae sunt AC, AH datum continentes angulum, datamque habentes rationem, et tangit C circumferentiam positione datam, tanget quoque H circumferentiam positione datam, per Prop. 7. hujus. Et quoniam a duobus datis punctis A, B ductae sunt AH, BD parallelae, datamque habentes rationem, aequales enim sunt; et tangit punctum H circumferentiam positione datam, tanget quoque D circumferentiam positione datam per Prop. 13. hujus.

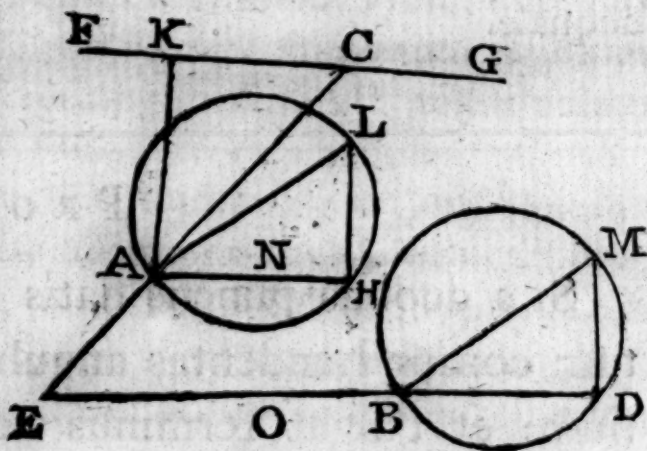


PROP. XVIII.

SI a duobus punctis datis ducantur duae rectae lineae datum comprehendentes angulum, et datum continentes spatium; tangat autem terminus unius rectam positione datam, tanget terminus alterius circumferentiam positione datam.

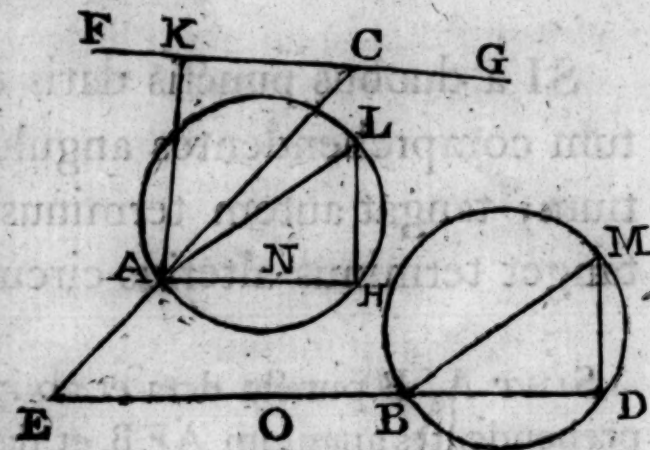
SINT A, B puncta data et ab ipsis ducantur AC, BD datum comprehendentes angulum AEB, et datum continentes spatium; tangat autem punctum C rectam FG positione datam, tanget D punctum circumferentiam positione datam.

Per punctum A ducatur recta AH parallela et aequalis rectae BD, et propter angulum AEB datum dabitur ipsi aequalis angulus CAH. Quoniam igitur a dato puncto A ductae sunt AC, AH datum facientes angulum, datumque continentes spatium, et tangit punctum C rectam positione datam; tanget H circumferentiam positione datam, per Prop. 10. hujus. et quoniam AH, BD parallelae sunt et aequales, et tangit H circumferentiam positione datam, tanget quoque D circumferentiam positione datam, per Prop. 13. hujus.



Componetur vero ope Prop. 10. et 13. sc. Ducatur ad FG perpendicularis AK, et ducatur AL faciens tum angulum KAL dato angulo aequalem, tum rectangulum KAL aequale spatio dato; et per punctum B ducta sit BM parallela et aequalis ipsi AL. Erit circumferentia circuli super diametrum BM descripti Locus quaesitus. Intelligatur

gatur enim describi circulus super diametrum AL , et quoniam huius circumferentia Locus est in Prop. 10. descriptus, ductâ quavis AC ad FG , si ducatur AN faciens angulum CAN aequalem ipsi KAL , occurret haec circulo ALH in puncto H quod faciet rectangulum CAH aequale ipsi KAL . ducatur BO parallela rectae AH , occurratque ipsi CA in E . angulus igitur BEA aequalis est ipsi CAH hoc est angulo dato KAL , et propter aequales et parallelas AL , BM , et parallelas AH , OB , occurret [Prop. 13. huj.] OB circulo BMD in puncto quodam D , ita ut aequales erunt AH , BD ; ostensum autem est rectangulum CAH aequale ipsi KAL , quare et rectangulum contentum AC , BD eidem KAL , hoc est spatio dato, est aequale.



PROP. XIX.

Si a duobus punctis datis ducantur duae rectae lineae datum comprehendentes angulum, et datum continentes spatium; et tangat terminus unius circumferentiam positione datam, si punctum datum a quo haec ducta est fuerit in ea circumferentia, tanget terminus alterius rectam positione datam. Si vero punctum datum non fuerit in ea circumferentia, tanget terminus alterius aliam circumferentiam positione datam. *Vide fig. praeced.*

Cas. 1.

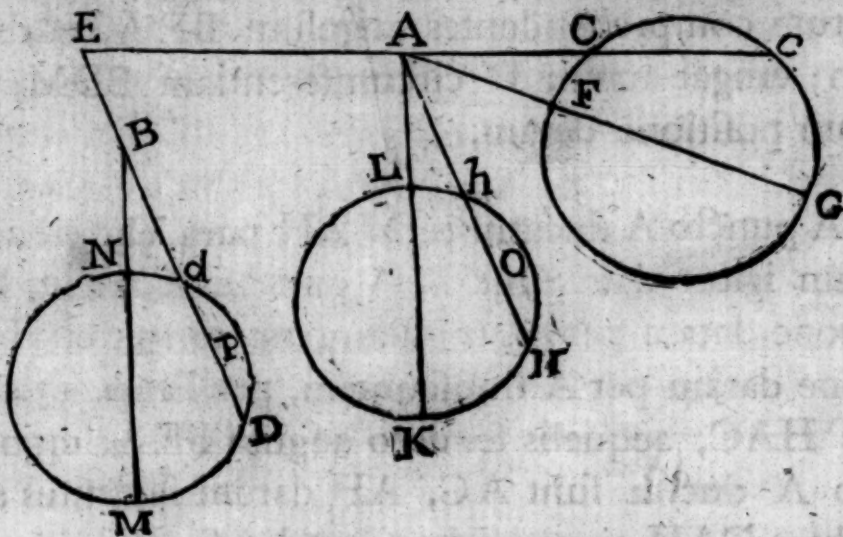
Cas. 1. SINT A, B puncta data, quorum B fit in circumferentia positione data, circuli sc. cujus diameter est BM, et ducantur BD, AC datum comprehendentes angulum BEA, et datum continentes spatium; tangat autem D circumferentiam BDM; tanget terminus C rectam positione datam.

A puncto A ducatur recta AH parallela et aequalis ipsi BD, quoniam igitur data sunt B, A puncta, et tangit D circumferentiam positione datam per B transeuntem, tanget et H circumferentiam positione datam per A transeuntem, per Prop. 13. huj. et datus est angulus HAC, aequalis sc. dato angulo BEA, ergo quoniam a dato puncto A ductae sunt AC, AH datum facientes angulum, et est rectangulum CAH aequale dato quod AC, BD continetur spatio, punctum autem H est in circumferentia in qua est A, tanget C rectam positione datam per Cas. 1. Prop. 11.

Componetur vero ope Prop. 13. et Cas. 1. Prop. 11. sc. ducendo AL parallelam et aequalem ipsi BM, et AK quae faciat tum angulum KAL aequalem dato angulo, tum rectangulum KAL aequale dato spatio, et per K ducendo rectam FKG ad rectos angulos ipsi AK; erit enim FG Locus quaesitus. Ducta enim ad FG quavis AC, ducatur AN faciens angulum CAN aequalem ipsi KAL; occurret haec [cas. 1. Prop. 11.] circumferentiae circuli super diametrum AL in puncto H quod faciet rectangulum CAH aequale ipsi KAL; et per B ducta BO parallela ipsi AH, occurrat BO rectae AC in E. est igitur BO recta quae cum AC comprehendit angulum BEA aequalem angulo HAC, hoc est dato angulo KAL. Et per Prop. 13. huj. occurret BO circulo super diametrum BM in puncto D, ita ut BD aequalis erit ipsi AH; et propterea rectangulum contentum AC, BD aequale est ipsi CAH hoc est dato rectangulo KAL.

Cas. 2.

Cas. 2. SINT A, B puncta data, et ab ipsis ducantur AC, BD datum comprehendentes angulum AEB, et datum continentes spatium, et tangat punctum C circumferentiam positione datam, cujus quae per A transit diameter est FG, non autem sit A in ea circumferentia; tanget quoque D aliam circumferentiam positione datam.



Ducatur enim AH parallela et aequalis ipsi BD, et quoniam datus est angulus AEB dabitur eidem aequalis CAH, et datum est rectangulum CAH, ergo per *Cas. 2. Prop. 11.* huj. tangit punctum H circumferentiam positione datam. Et quoniam a duobus punctis datis A, B ductae sunt AH, BD parallelae et aequales, et tangit punctum H circumferentiam positione datam, tanget etiam D circumferentiam aliam positione datam per *Prop. 13.* hujus.

Componetur vero ope *Cas. 2. Prop. 11.* et *Prop. 13.* ducendo sc. rectam AK quae faciat tum angulum FAK aequalem dato angulo, tum rectangulum FAK aequale dato spatio, et invento KL diametro sc. circuli in *Cas. 2. Prop. 11.* descripti, ducatur a puncto B recta ipsi AK parallela, in qua sumantur BM, BN aequales ipsis AK, AL; circumferentia circuli super diametrum MN descripti, erit Locus quaesitus. Ducatur enim a puncto A quaevis AC ad circulum cujus diameter est FG, et ab eodem puncto ducatur AO faciens angulum CAO aequalem ipsi FAK, et per *Cas. 2. Prop. 11.* occurret AO circulo super diametrum KL in puncto H, ita ut rectangulum CAH aequale erit ipsi FAK. a puncto vero B ducatur BP parallela ipsi AO, occurratque ipsi CA in E. Est igitur BP recta quae cum CA comprehendit angulum AEB aequalem angulo CAH, hoc est dato angulo

gulo FAK. Et per Prop. 13. quoniam BM, BN aequales et parallelae sunt ipsis AK, AL, et est BP parallela ipsi AH, occurret BP circulo NMD in puncto D, ita ut aequales erunt BD, AH, et propterea rectangulum contentum AC, BD aequale est ipsi CAH, hoc est dato rectangulo FAK.

PROP. XX.

SI rectae lineae magnitudine datae, atque parallelae rectae positione datae, extremitas una tangat rectam positione datam; tanget quoque altera rectam positione datam.

SIT recta AB magnitudine data, et parallela positione datae rectae CD; tangat autem punctum B rectam CE positione datam; tanget quoque punctum A rectam positione datam.

Quoniam positione dantur rectae CD, CE dabitur punctum C [25. dat.]. In CD vero sumatur CF aequalis ipsi BA, et versus easdem partes; magnitudine igitur data est CF, quoniam et BA; sed et positione, et datum est punctum C; ergo datum est F punctum [27. dat.]. Jungatur AF, et propter aequales et parallelas AB, FC, parallela erit FA ipsi CB. Quoniam igitur per datum punctum F ducta est FA parallela positione datae CE, positione dabitur FA [28. dat.]; tangit propterea punctum A rectam positione datam.



Compositio manifesta est, sc. in recta CD sumatur CF aequalis rectae magnitudine datae, et per F ducatur FA parallela ipsi CE. Erit haec Locus quaesitus, A quovis enim in ipsa puncto A, ducatur AB parallela rectae CD; erit AB aequalis ipsi CF, hoc est rectae datae, ut patet ex 34. 1.

G

PROP.

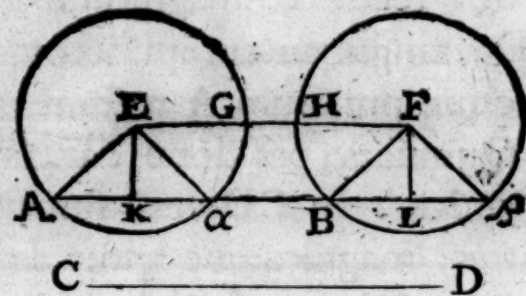
PROP. XXI.

Haec a Cl. FERMATIO praecedenti adjicitur.

Si rectae lineae magnitudine datae quae rectae positione datae parallela est, extremitas una tangat circumferentiam positione datam; tanget quoque extremitas altera circumferentiam positione datam.

SIT recta AB magnitudine data, et parallela positione datae CD. Tangat autem punctum A circumferentiam positione datam, cujus centrum est E; tanget quoque B circumferentiam positione datam.

A centro E ducatur, ad utraque partes, recta EF parallela et aequalis ipsi AB, junganturque AE, BF; et quoniam data est AB magnitudine, dabitur et magnitudine EF, et quoniam AB parallela est positione datae CD, erit EF eidem parallela, datum autem est punctum E, ergo positione data est EF [28. dat.], sed et magnitudine; datur igitur punctum F [27. dat.]; et quoniam data est AE magnitudine, dabitur magnitudine ipsi aequalis [33. 1.] BF. et datur punctum F, ergo tangit punctum B circumferentiam positione datam per Prop. 1. hujus.



Componetur vero ita.

Ducatur per centrum E circuli positione dati recta ipsi CD parallela, et in ea fumatur, ad utrasvis partes, recta EF aequalis rectae magnitudine datae. Occurrat vero EF circumferentiae in G , et ipsi EG aequalis fumatur FH ; centroque F et intervallo FH circulus describatur. Erit hujus circumferentia Locus quaesitus; hoc est, si a quovis puncto A in circumferentia cujus centrum est E , ducatur recta parallela ipsi CD , occurrat haec circulo cujus centrum est F in quodam puncto B , ut patet; et erit AB aequalis ipsi EF , dummodo sc. puncta A, B sita sint ad easdem circulorum partes. Junctis enim AE, BF ducantur

ducantur ad AB perpendiculares EK, FL; haec inter se aequales erunt [34. 1.], et aequales sunt AE, BF; quare in triangulis AEK, BFL, aequales sunt AK, BL [47. 1.], ideoque est AB aequalis ipsi KL, hoc est ipsi EF, hoc est rectae magnitudine datae.

PROP. XXII.

Si a puncto ad duas parallelas rectas positione datas, ducantur duae rectae lineae vel in eadem recta linea, vel in datis angulis; datamque habentes proportionem: tanget punctum rectam positione datam.

A puncto A ad datas positione parallelas BC, DE, ductae sint AF, AG vel in eadem recta, vel in datis angulis; et in utroque casu datam habentes proportionem: tanget punctum A rectam positione datam.

Cas. 1. Quando ductae AF, AG sunt in recta linea.

Ex 37. et 38. Datorum patet parallelam per A ductam utrilibet rectarum BC, DE, positione datam esse; quare tangit punctum A rectam hanc positione datam. Compositio autem ex iisdem datis manifesta est, sc.

A puncto quovis H in recta BC ducatur utcumque ad DE recta HK, et si debet punctum A inveniri inter parallelas, secetur HK in L, ita ut sit HL ad LK in data ratione quam ducenda ad BC habere debet ad ducendam ad DE; si vero requiratur ut punctum A sit extra parallelas puta ad partes ipsius BC, producaturs KH ad L, ita ut HL sit ad LK in praedicta data ratione. per punctum vero L ducatur recta parallela utrilibet rectarum BC, DE; Erit haec Locus quaesitus, hoc est si a quovis in ipsa puncto A ducatur utcumque recta ipsis BC, DE oc-



DE occurrens in F, G, erit AF ad AG, ut HL ad LK. Jungatur enim KA, occurratque ipsi BC in M. Igitur propter parallelas est AF ad AG, ut (AM ad AK, hoc est ut) HL ad LK, hoc est in ratione data.

Manifestum autem est in casu quo punctum A requiritur inveniri extra parallelas, rationem datam quam habet AG ducta sc. ad parallelam remotiorem, ad AF ductam ad reliquam parallelam, debere rationem esse majoris ad minorem.

Cas. 2. Quando AF, AG ductae sint in datis angulis AFC, AGE, et requiritur ut punctum A sit inter parallelas.

Occurrat AG ipsi BC in H, et quoniam datus est angulus AGE, dabitur eidem aequalis AHF; et datus est AFH, quare triangulum AHF specie datum est, [41. dat.]. data igitur est ratio AH ad AF, et ex hypothesi data est ratio AF ad AG; ergo [8. dat.] data est ratio AH ad AG; ideoque recta quae per A ducta est ipsi BC parallela positione dabitur [37. dat.]. tangit propterea punctum A rectam hanc positione datam.

Componetur vero ita.

A puncto quovis H in BC ducantur ad reliquam parallelam DE, rectae HG, HK, quarum HG faciat angulum HGE aequalem dato angulo quem ducenda ad DE cum ipsa comprehendere debet; et HK faciat angulum HKD aequalem reliquo dato angulo. et fit ratio data quam ducenda ad DE habere debet ad ducendam ad BC aequalis rationi LH ad HK, et secetur GH in A ita ut GA fit ad AH, ut LH ad HG; per A vero ducatur AM ipsi BC parallela, Erit haec Locus quaesitus; hoc est si a quovis in ipsa puncto A ducantur AF, AG ad parallelas in datis angulis, erit AG ad AF, ut LH ad HK. Ex constructione enim est AG ad AH, ut LH ad HG; ut

q: AC et unde datur ratio ipsius AC ipsius AH . Et datam vero A et ad AF' vero
recta AF' ad AH quae recta ipsi BC parallela est. Aducla ratione dabitur
tam ipsa ratione datam.

Comprender ita

Sicut ang. $\angle F H$, $\angle H K$ respectu aequalis angulis datus, et subtrahit quam habet debet ducenda ad $D E$ ad
 laudandam ad $B C$ equalis rationi $H K$ ad $H F$, et puncta $K F$ recta occurrente $D E$ in G , per G ducatur $E A$ ipsi
 $H K$ parallela et $H F$ occurrent in A . Per A ducatur $M A$ ipsi $B C$ parallela. Erit hic Locus quarelibet
 si a puncto in $E A$ trahatur A ducatur in datus ang. $A F$, $H F$, et $A F$ ad $A G$ in ratione data. Inveniam
 enim $A G$ et $H K$ finit. similiter erunt triangula $F A G$, $F H K$ et $F A$ sit ad $A G$ ut $F H$ ad $H K$, hoc est
 in data ratione.

vero AH ad AF, ita est HG ad HK; Ergo ex aequo est AG ad AF, ut LH ad HK, hoc est in data ratione.

Cas. 3. Quando punctum A est extra parallelas, reliquis ut in casu 2. manentibus. Occurrat AG alteri parallelae in H, et quoniam datus est angulus AGE, dabitur eidem aequalis AHF; et datus est AFH, quare triangulum AHF specie datum. data igitur ratio AH ad AF, et ex hypothefi data est ratio AF ad AG; Ergo [8. dat.] data est ratio AH ad AG, ideoque quae per A ducta est ipsi BC parallela positione dabitur, [38. dat.]. Tangit propterea punctum A hanc rectam positione datam.

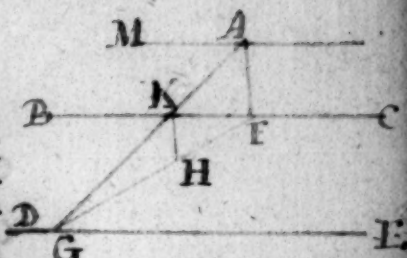
Quoniam vero punctum A est extra parallelas, erit AG major AH; quare ratio AG ad AF major erit ratione AH ad AF; hoc est si a puncto quovis H ducatur ad unam ex parallelis DE rectae HG, HK quarum HG facit angulum HGE aequalem ei quem ducta ad DE, parallelam sc. a puncto A remotiorem, cum ipsa comprehendere debet, et HK facit angulum HKD aequalem reliquo dato angulo; ratio data quam ducta ad parallelam remotiorem habet ad ductam ad reliquam parallelam major debet esse ratione HG ad HK,

Componetur vero ita.

A puncto quovis H in BC ducantur ad reliquam parallelam DE, rectae HG, HK in datis angulis ut jam dictum fuit; et sit ratio data quam ducta ad parallelam remotiorem habet ad ductam ad reliquam, aequalis rationi LH ad HK quae major debet esse ratione HG ad HK, ut ostensum fuit. Et producat GH ad A ita ut GA sit ad AH, ut LH ad HG; per A vero ducatur AM ipsi BC parallela, erit haec Locus quaesitus; hoc est si a quovis, in ipsa puncto A ducantur AF, AG ad parallelas in datis angulis; erit AG ad AF, ut LH ad HK. Ex constructione enim est AG ad AH, ut LH ad HG, ut vero AH ad AF, ita est HG ad HK; ergo ex aequo est AG ad AF, ut LH ad HK, hoc est in data ratione.

PROP.

Componetur ita



Angulus AGE et per punctum H ubi AG occurrat rectae BC ducatur HL

Sunt anguli GKB, CKH

respective aequales angulis datis, et lateralis GK

ad KH aequalis rationi

quam habere debet ducta

ad DE, ad ductam ad

ad BC, per H ducatur GHL

et per F, FA ipsi HK par-

allela et GK producta

occurrendi in A. Recta per

A ipsi BC parallela erit locus

quaesitus, ut si a quo-

vis in illa puncto A ducantur

AG, AF in datis angu-

lis erunt in data ratione

quia KGL, AKL

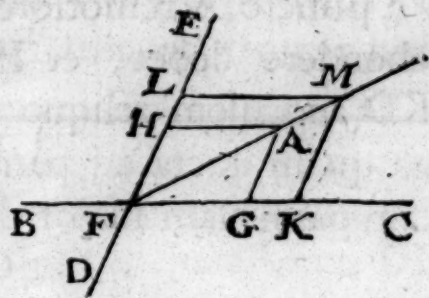
PROP. XXIII.

Si a puncto ad duas positione datas rectas lineas, inter se convenientes, ducantur duae rectae lineae, in datis angulis, datamque habentes proportionem: tanget punctum rectam lineam positione datam.

A puncto A ad datas positione rectas BC, DE sibi mutuo occurrentes in F, ductae sint AG, AH in datis angulis AGF, AHF, datamque habentes rationem: tanget punctam A rectam positione datam.

Cas. 1. Quando ductae AG, AH sunt positione datis DE, BC parallelae.

In hoc casu erit AGFH parallelogrammum, et quoniam data est ratio AG ad AH, hoc est AG ad GF, datumque est angulus AGF, specie dabitur triangulum AGF, [41. dat.]; quare juncta AF positione dabitur [29. dat.]. Compositio vero obvia est, sc. a puncto quovis K in BC ducendo rectam ipsi DE parallelam, et in ipsa sumendo rectam KM quae ad KF datam habeat rationem. Juncta enim MF erit Locus quaesitus. Nam in eo sumatur punctum quodvis A, et ductis AG, AH ipsis FE, FC parallelis, Erit AG ad AH seu FG, ut KM ad KF, hoc est in data ratione. Locus vero in hoc casu ita aliter enunciarı potest, viz.



Si a puncto A ad rectam positione datam BC, ducatur AG in angulo dato, datamque habens rationem ad GF abscissam sc. inter ipsam et datum punctum F. Tanget punctum A rectam positione datam.

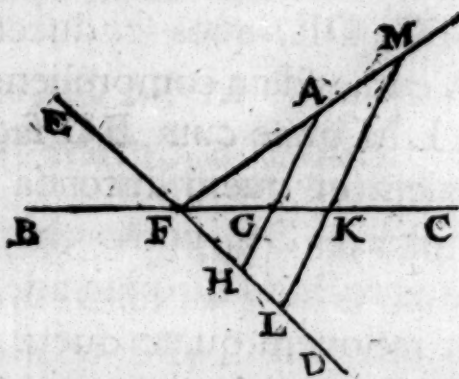
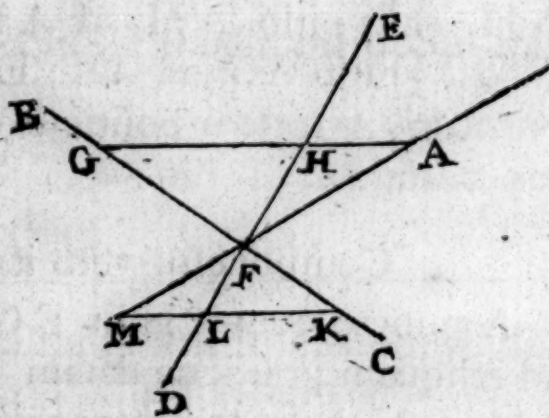
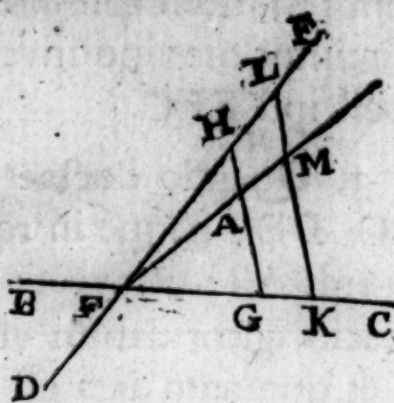
Cas. 2. Quando AG, AH sunt in recta linea. igitur quoniam data est ratio GA ad AH; dabitur ratio GH ad AH; et propter specie datum

tum triangulum FGH , dabitur ratio FH ad HG ; quare [8. dat.] data est ratio FH ad HA , datusque est angulus FHA , junctâ igitur AF , specie dabitur triangulum $A FH$ [41. dat.], ideoque datur angulus AFH ; et positione data est FH , punctumque F , ergo positione datur FA [29. dat.] quam sc. tangit punctum A .

Componetur vero ita.

A puncto quovis L in recta DE ad rectam BC ducatur quaevis LK faciens angulum LKF aequalem dato angulo quem sc. ducta a puncto A cum ipsa comprehendere debet. Et si LK occurrat lateribus anguli CFE , hoc est si angulus CFE una cum dato angulo AGB minor sit duobus rectis, in ipsa LK sumatur punctum M quod faciat rationem segmenti MK inter M sc. et rectam FC ad reliquum segmentum ML aequalem rationi quam ducta a puncto A ad ipsam BC habere debet ad reliquam ductam. Si vero angulus CFE una cum dato angulo AGB major sit duobus rectis, hoc est si recta LK occurrat lateribus anguli ipsi CFE adjacentis, producat KL ad punctum M , ita ut KM sit ad ML in data ratione quam ducta ad BC habere debet ad ductam ad DE ; et juncta FM in utroque casu erit Locus quaesitus; hoc est si a quovis in ipsa puncto A ducatur recta ipsi LK parallela, occurrens BC in G et DE in H ; Erit GA ad AH , ut KM ad ML . Est enim propter parallelas AG ad AF , ut KM ad MF ; ut vero AF ad AH , ita MF ad ML ; Ergo ex aequo est AG ad AH , ut KM ad ML .

Manifestum vero est in casu quo KL occurrat lateribus anguli adjacentis



centis ipsi CFE, si ratio data fuerit majoris ad minorem, producendam esse KL ad partes puncti L. Si vero fuerit ratio data minoris ad maiorem producendam esse ad partes puncti K.

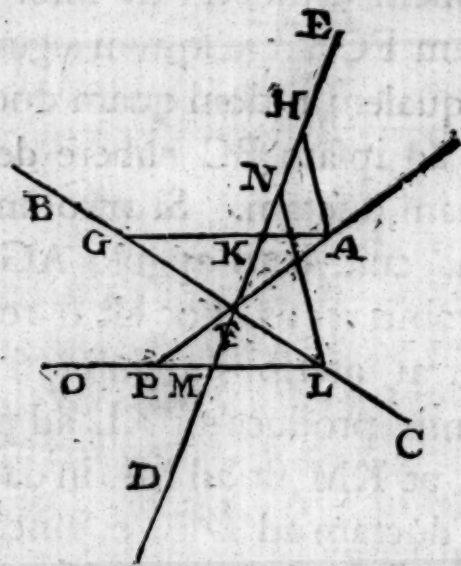
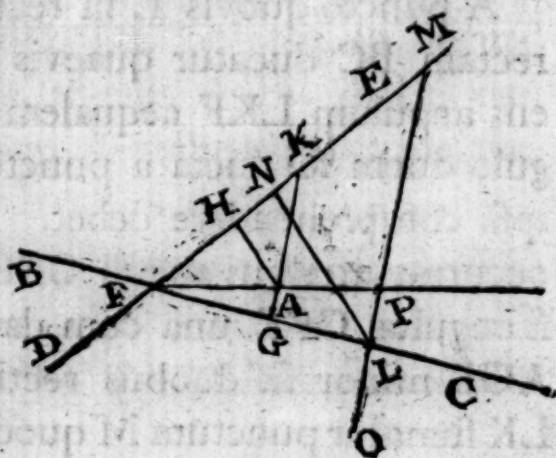
Et similiter omnino inveniatur Locus intra angulum BFE qui deinceps est ipsi EFC.

Cas. 3. Quando ductae AG, AH neque parallelae sunt positione datis BC, DE; neque in recta linea.

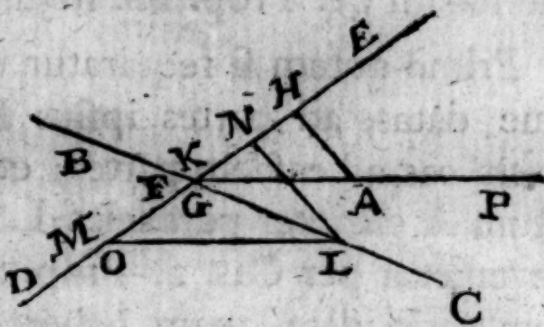
Occurrat AG utraque sc. ex ductis, reliquae positione datae DE in K. Specie igitur datum est triangulum AHK, et quoniam data est ratio AG ad AH, ut et ratio AH ad AK, dabitur [8. dat.] ratio AG ad AK; Ergo tangit punctum A rectam positione datam per cas. 2. hujus.

Componetur vero ita.

A puncto quovis L in FC ducantur ad reliquam positione datam DE rectae LM, LN datos facientes angulos, cum ipsis BC, DE, quos sc. ducendae a puncto A cum iisdem comprehendere debent, et in LM quae cum BC facit angulum aequalem ei quem ducenda a puncto A cum eadem BC comprehendere debet, fumatur recta OL quae ad LN datam habet rationem quam ducta a puncto A ipsi LM parallela habere debet ad reliquam ductam. Et per cas. 2. ducatur intra illum angulorum EFC, EFB intra quem requiritur punctum A existere, recta FP quae Locus est punctorum per quorum quodvis A si ad ipsas BC, DE ducatur recta GK ipsi LM parallela, habeat GA ad AK eandem rationem quam habet OL ad LM; Erit FP Locus quaesitus. Nam ex constructione, est GA ad AK,



In casu vero quo recta LM cadit intra angulum qui deinceps est ipsi EFC, si ratio data aequalis fuerit rationi quam habet LM ad LN, patet rectam FP quae parallela est ipsi LM fore Locum quaesitum. Nam a quovis in ea puncto A ductâ AH parallelâ rectae LN; erit AF seu AG ad AH, ut LM ad LN.



PROP. XXIV.

A puncto A ad datas positione parallelas BC, DE ductae sint in datis angulis rectae AG, AH; et sit AH una cum eâ AK ad quam altera AG datam habet rationem aequalis datae rectae, et ponatur AK in HA producta ad partes A. Quoniam igitur ad positione datam BC, in dato angulo, ducta est KH quae magnitudine datur, tanget punctum K rectam positione datam et ipsi BC parallelam, [Prop. 20. hujus



jus]. Sit ea LM. Igitur a puncto A ad duas rectas parallelas positione datas DE, LM ductae sunt AG, AK in datis angulis datamque inter se habentes rationem, et propterea tangit punctum A rectam positione datam per Prop. 22. hujus.

Primò autem si requiratur ut punctum A sit extra parallelas positione datas, ad partes ipsius BC, cadet LM extra eas ad easdem partes; et quoniam punctum A est inter parallelas LM, DE, Locus invenietur per Cas. 2. Prop. 22. Poterit autem ratio data quam habere debet AG ad AK talis esse quae faciat punctum A cadere inter ipsas BC, DE, unde Locus construi non poterit; invenienda igitur est determinatio qua obtinente punctum A semper cadat extra parallelas, sc. inter ipsas BC, LM. ut hoc fiat, occurrat GA ipsis BC, LM in F, N; et ad LM ducatur FO parallela rectae HK. Et quoniam debet GA major esse GF, debet propterea ratio GA ad AN major esse ratione GF ad FN; ut autem AN ad AK, ita est FN ad FO; Ergo ex aequo GA ad AK ratio, major debet esse ratione GF ad FO; hoc est ratio data quam secunda recta AG habet ad eam AK quae simul cum prima AH data est, major debet esse ratione quam segmentum GF secundae inter parallelas BC, DE, habet ad FO seu HK datam sc. magnitudine rectam. Igitur quando punctum A requiritur esse extra parallelas ad partes ipsius BC ad quam sc. prima recta ducenda est, Propositio

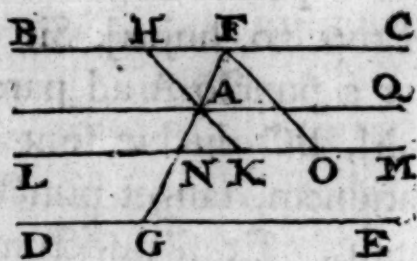


Componetur ita.

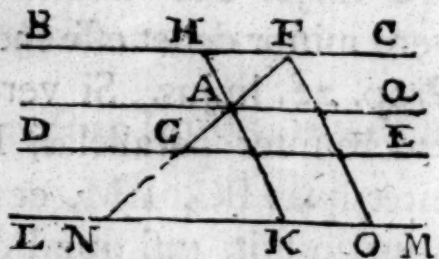
A puncto quovis F in BC ducatur recta FO parallela ei quae a puncto A ad eandem BC ducenda est; et in ipsa sumatur, extra parallelas, FO aequalis rectae datae; et per O ducatur LM parallela ipsi BC, ad DE vero ducatur FG parallela ei quae a puncto A ad eandem DE ducenda est. Et per Cas. 2. Prop. 22. ducatur recta AQ intra parallelas DE, LM, quae Locus est punctorum a quorum quovis A si ducantur ad DE, LM rectae AG, AK ipsis FG, FO parallelae, habeat AG ad AK rationem datae rationi aequalem, quae ut ostensum fuit, major

jor debet esse ratione GF ad FO; erit AQ Locus quaesitus. Nam quoniam ratio AG ad AK major est ratione GF ad FO; ut vero AK ad AN, ita est FO ad FN; erit ex aequo ratio AG ad AN major ratione GF ad FN, quare GA major est GF, et cadit punctum A inter ipsas BC, LM. Est autem ex constructione GA ad AK in data ratione, producta igitur KA ad BC in H, Erit AH una cum AK ad quam AG datam habet rationem, aequalis datae rectae FO.

Secundo, Quando requiritur punctum A esse inter parallelas BC, DE, cadet LM ad partes ipsius BC ad quas est DE, vel inter parallelas, vel in ipsa DE vel extra ipsas. Et si quidem cadat inter parallelas, quoniam est GA minor GF erit ratio GA ad AN major ratione GF ad FN; unde prorsus ut in praemissis, ostendetur rationem quam habet AG ad AK majorem debere esse ratione GF ad FO seu HK; et inventa recta AQ per Cas. 3. Prop. 22. compositio fiet omnino ut praecedens, si ponatur FO sc. ad partes ipsius DE.

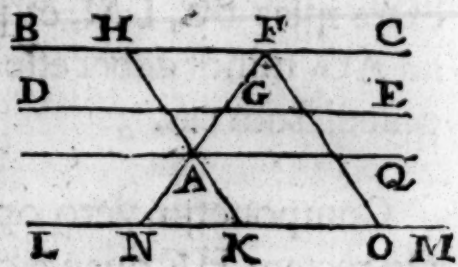


Si autem recta LM cadat extra parallelas, quoniam est GA minor GF, et etiam minor AN, Erit ratio GA ad AN minor ratione GF ad FN; unde ostendetur ratio GA ad AK minor ratione GF ad FO seu HK. Et inventa AQ per Cas. 3. Prop. 22. caetera fient omnino ut in praecedentibus; posita tamen FO versus partes ipsius DE.



Quando autem LM coincidit cum DE manifestum est rationem GA ad AK eandem esse cum ratione GF ad FO.

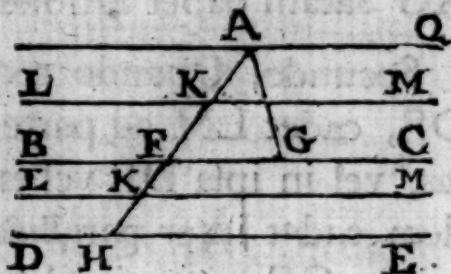
Tertio, Quando requiritur ut punctum A cadat extra parallelas ad partes ipsius DE nulla determinatione opus erit nisi quod data recta HK major debet esse segmento ipsius inter parallelas BC, DE. et compositio fiet ut in praemissis sc. per Cas. 2. Prop. 22.



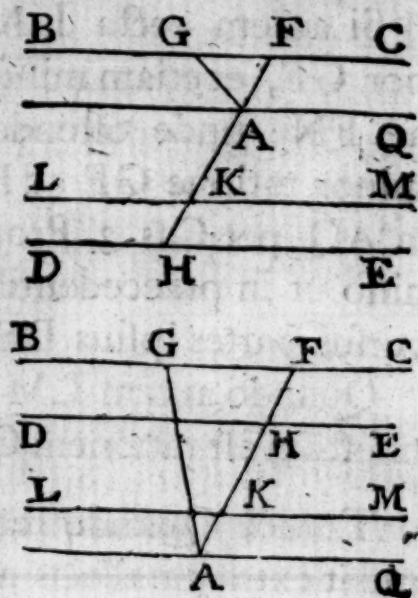
Cas. 2. Quando una ductarum major est altera data quam in ratione.

A puncto A ad datas positione parallelas BC, DE ductae sint in datis angulis rectae AH, AG quarum AH major est AG datâ quam in ratione; tanget punctum A rectam positione datam.

Ab AH auferatur data recta HK; datur igitur [11. def. dat.] ratio reliquae KA ad ipsam AG; et propter DE positione et HK magnitudine datam, angulumque datum KHE, tanget punctum K rectam positione datam ipsi DE parallelam [Prop. 20. hujus]. Sit ea LM; quoniam igitur a puncto A ad parallelas positione datas



LM, BC ductae sunt AK, AG in datis angulis, datamque habentes rationem, tanget punctum A rectam positione datam, per Prop. 22. hujus. Et si punctum A ponatur esse extra parallelas BC, DE ad partes ipsius BC, poterit recta LM cadere vel intra, vel extra ipsas ad partes rectae BC, prout recta data HK minor vel major est ipsa HF, segmento sc. inter parallelas BC, DE. In primo casu debet ratio data quam habet AK ad AG major esse ratione AF ad AG; in altero vero minor debet esse eadem; ut patet ex cas. 3. Prop. 22. hujus. Si vero punctum A ponatur cadere inter parallelas, BC, DE, idem cadet inter ipsas BC, LM, et nulla in hoc casu determinatio erit, nisi quod data HK minor debet esse ipsa HF. Denique si ponatur A cadere extra parallelas ad partes rectae DE, idem cadet extra ipsas BC, LM, et propterea ratio data AK ad AG minor debet esse ratione AF ad AG per praedictum cas. 3.



Componetur vero ope Prop. 22. ducendo sc. a quovis in DE puncto rectam HF quae faciat angulum FHE aequalem dato angulo quem ducenda

ducenda a puncto A cum DE comprehendere debet; et ablata data recta HK, ducendo LKM ipsi DE parallelam; tum inveniendō rectam AQ Locum sc. punctorum a quorum quovis A rectae AK; AG ad ipsas LM, BC ductae in datis angulis, datam habeant rationem; Erit enim AQ Locus quaesitus. Nam habet AK ad AG datam rationem, et data est HK; quare AH major est AG data quam in ratione.

In Cas. 3. Quando sc. una ductarum minor est altera data quam in ratione, similiter invenietur Locus, vel reduci poterit hic casus ad 2^{dum}; si enim magnitudo AB minor fuerit alia CD data quam in ra-

$$\begin{array}{ccccccc} A & & B & & E & & \\ \hline C & & F & & D & & \end{array}$$
 tionem; et vicissim haec major erit illa data quam in ratione. Etenim ad AB addatur data BE; dabitur igitur ratio AE ad CD [12. def. dat.]; fiat autem ut AE ad CD, ita BE ad quartam DF; datur igitur ratio BE ad DF, et propter datam BE dabitur DF [2. dat.]. Et quoniam est tota CD ad totam AE, ut ablata DF ad ablatam BE, Erit [19. 5.] CF ad AB, ut CD ad AE, hoc est in ratione data; et datur FD; quare CD major est ipsa AB data quam in ratione, [11. def. dat.].

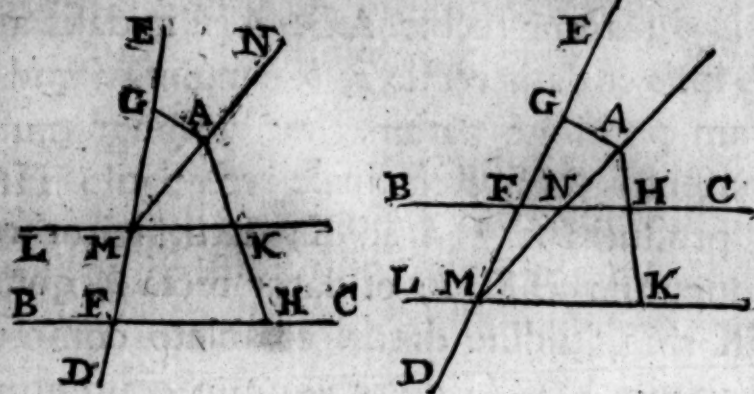
PROP. XXV.

Si a puncto ad duas positione datas rectas lineas, inter se convenientes, ducantur duae rectae lineae, in datis angulis, quarum una simul cum ea ad quam altera datam habet rationem, data est; “ vel quarum una major vel minor est altera data quam in ratione:” tanget punctum rectam positione datam.

Cas. i. Quando una rectarum simul cum ea ad quam altera datam habet rationem, data est.

A puncto

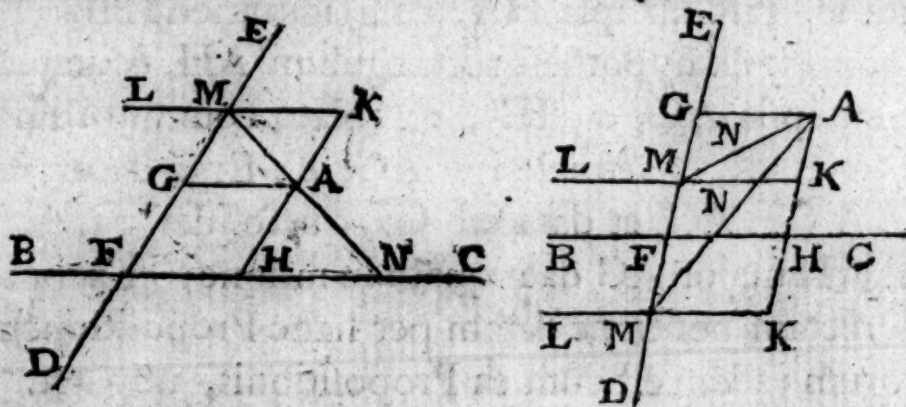
one datam MN quae ope Prop. 23. invenietur; a quovis in ipsa puncto A ducantur ad FC , FE in datis angulis rectae AH , AG quarum AH occurrat LM in K . et quoniam ex constructione AK datam habet rationem ad AG , et data est HK ; erit AH major vel minor ipsa AG data quam in ratione.



In casu autem quo AH , AG parallelae sunt positione datis BC , DE ; Locus poterit ita aliter enunciari, viz.

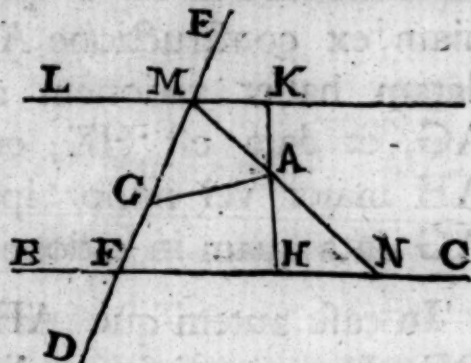
Si a puncto A ad rectam positione datam BC in qua datum est punctum F , ducatur AH in dato angulo, fueritque una ipsarum AH , HF simul cum ea ad quam altera datam habet rationem, data; vel si una ipsarum major aut minor fuerit altera data quam in ratione; tanget punctum A rectam positione datam.

Compleatur enim parallelogrammum $AHFG$, et quoniam datum est punctum F in recta positione data BC , angulusque CFG datus est, positione dabitur FG [29. dat.], et aequales sunt AG , FH ; igitur a puncto A ad positione datas BC , DE , ductae sunt AH , AG in datis angulis, et una ipsarum, puta AH , una cum ea ad quam altera datam habet rationem, data est; vel est AH major aut minor AG data, quam in ratione; quare hic Locus idem est cum praedicto casu hujus Propositionis.



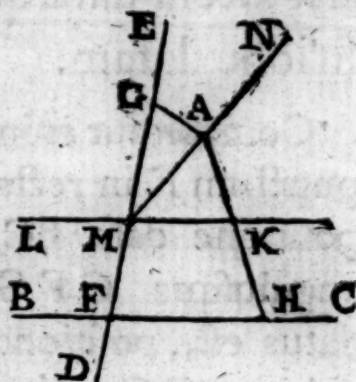
COR.

COROLL. I. Hinc si a puncto A ad duas positione datas rectas BC, DE ducantur rectae AG, AH in datis angulis, fuerintque rectangula ab ipsis et datis rectis a , b contenta simul data; tanget punctum A rectam positione datam. Sit rectangulum contentum AG, a , una cum contento AH, b , aequale rectangulo HK, b , productâ sc. HA ad K; datur igitur rectangulum HK, b ; et datur recta b , quare HK magnitudine datur. et ablato communi spatio AH, b ; erit reliquum contentum sc. AG, a , aequale reliquo AK, b ; igitur est AG ad AK, ut b ad a , hoc est in ratione data. Ergo quoniam a puncto A ad duas positione datas BC, DE in datis angulis ductae sunt rectae AH, AG, et una ipsarum AH simul cum ea AK ad quam altera AG datam habet rationem, data est. Tanget punctum A rectam positione datam per hanc Propositionem.



COROLL. II. Et si unum ex rectangulis praedictis sc. AH, b , majus fuerit altero AG, a , spatio dato; tanget punctum A rectam positione datam.

Sit spatium datum aequale contento HK, b , ablata sc. HK ab ipsa HA, data igitur erit HK. Et quoniam ex hypothese rectangulum AH, b , aequale est ipsis AG, a ; HK, b ; ablato communi HK, b ; erit AK, b , aequale ipsi AG, a ; Ergo datur ratio AK ad AG, et data est KH, quare [def. 11. dat.]



est AH major AG data quam in ratione; et propterea tangit punctum A rectam positione datam per hanc Propositionem. Compositio vero horum eadem est cum ea Propositionis, ut patet.

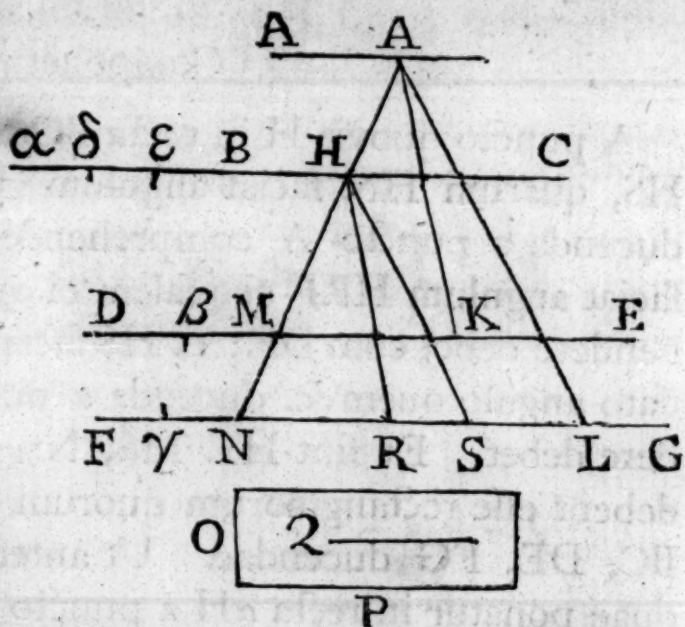
P R O P.

PROP. XXVI.

Si sint tres rectae lineae parallelae positione datae, et ad ipsas a quodam puncto ducantur rectae lineae in datis angulis; sit vero rectangulum contentum data recta et una ex ductis, simul cum eo quod continetur data et alia ducta, aequale rectangulo contento data et reliqua ducta. Tanget punctum rectam positione datam.

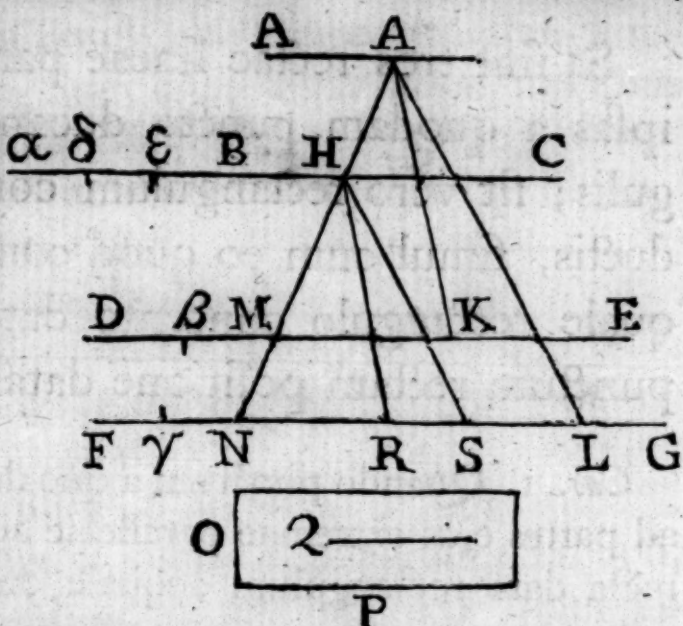
Cas. 1. Quando punctum a quo ducuntur rectae est extra parallelas, ad partes ejus extremae parallelae ad quam ducta comprehendit cum recta data rectangulum aequale duobus reliquis rectangulis. dicatur autem haec extrema prima, reliqua vero extrema dicatur secunda.

A puncto A ad tres positione datas rectas inter se parallelas, BC, DE, FG ductae sint AH, AK, AL in datis angulis AHB, AKD, ALF, quarum AH occurrat ipsis DE, FG, in M, N, punctis; sitque rectangulum contentum AH et data magnitudine recta H α aequale contento AK, et data magnitudine recta M β , simul cum contento AL et data magnitudine N γ . Tanget punctum A rectam positione datam.



Quoniam enim specie datum est triangulum AKM, dabitur ratio AM ad AK; in hac ratione sit M β ad $\alpha\delta$, et propter datam M β dabitur $\alpha\delta$; et rectangulum contentum ipsis AM, $\alpha\delta$ aequale erit contento AK, M β . Similiter quoniam data est ratio AN ad AL, si in hac ratione fiat N γ ad $\delta\epsilon$, dabitur $\delta\epsilon$; et rectangulum AN, $\delta\epsilon$ aequale erit ipsi AL, N γ . Ex hypothesi au-

tem rectangulum $AH\alpha$ aequale est ipsis AK , $M\beta$; AL , $N\gamma$ simul; quare idem $AH\alpha$ aequale erit (rectangulis AM , $\alpha\delta$; AN , $\delta\epsilon$ simul; hoc est [1. 2.] ipsis AH , $\alpha\delta$; HM , $\alpha\delta$; AH , $\delta\epsilon$; HN , $\delta\epsilon$; hoc est [1. 2.]) rectangulis AH , $\alpha\epsilon$; HM , $\alpha\delta$; HN , $\delta\epsilon$. et ablato communi rectangulo AH , $\alpha\epsilon$; erit reliquum $AH\epsilon$ aequale reliquo ipsis sc. HM , $\alpha\delta$; HN , $\delta\epsilon$. datae autem sunt HM , HN magnitudine [32. dat.], et datae sunt rectae $\alpha\delta$, $\delta\epsilon$; quare data sunt rectangula HM , $\alpha\delta$; HN , $\delta\epsilon$; ipsisque aequale rectangulum $AH\epsilon$ datum erit. et data est magnitudine recta $H\epsilon$, ergo et AH magnitudine data est. positione autem data est BC , datusque est angulus AHB ; ergo tangit punctum A rectam positione datam per Prop. 20. hujus.



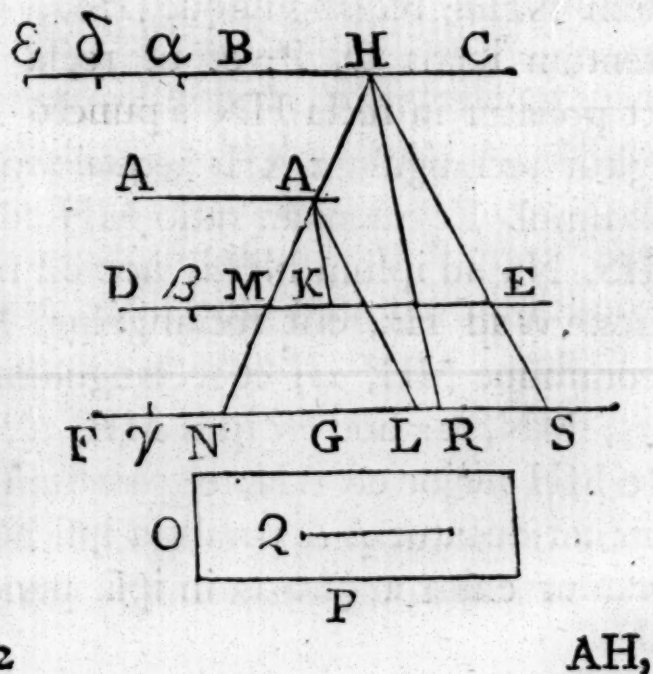
Componetur vero ita.

A puncto quovis H in recta BC , ducantur ad FG rectae HN , HR , HS , quarum HN faciat angulum HNF aequalem dato angulo quem ducenda a puncto A comprehendere debet cum ipsa BC ; HR vero faciat angulum HRF aequalem ei quem ducenda a puncto A comprehendere debet cum DE ; et HS faciat angulum HSF aequalem reliquo dato angulo quem sc. ducenda a puncto A cum ipsa FG comprehendere debet. Et sint $H\alpha$, $M\beta$, $N\gamma$ aequales datis rectis quae latera debent esse rectangulorum quorum reliqua latera sunt rectae ad ipsas BC , DE , FG ducendae. Ut autem NH ad HR , ita fiat $M\beta$ ad $\alpha\delta$, quae ponatur in recta αH a puncto α versus H . Et ut NH ad HS , ita fiat $N\gamma$ ad $\delta\epsilon$, quae ponatur a puncto δ versus H . Et quoniam ostensum fuit rectangulum $AH\alpha$ aequale ipsis AH , $\alpha\epsilon$; HM , $\alpha\delta$; HN , $\delta\epsilon$; erit $AH\alpha$ majus ipsa AH , $\alpha\epsilon$. quare debet $H\alpha$ major esse $\alpha\epsilon$; et propterea rectangulum $NH\alpha$ majus debet esse (ipso NH , $\alpha\epsilon$, hoc est ipsis

ipsis NH , $\alpha\delta$; NH , $\delta\epsilon$; hoc est propter praedictas proportionales) re-
ctangulis HR , $M\beta$; HS , $N\gamma$; quae est Determinatio hujus casus. Sit
igitur rectangulum $NH\alpha$ majus ipsis HR , $M\beta$; HS , $N\gamma$; et retrogradi-
endo ostendetur $H\alpha$ major $\alpha\epsilon$. rectangulis autem HM , $\alpha\delta$; HN , $\delta\epsilon$ si-
mul, aequale fiat rectangulum contentum rectis O , P [45. 1.]. Ut
vero $H\epsilon$ ad O , ita fiat P ad quartam Q , et producat NH ad A ita
ut AH aequalis sit rectae Q ; per A vero ducatur recta AA parallela
ipfi BC : Erit haec Locus quaesitus, hoc est si a quovis in ipsa puncto
 A ducantur ad BC , DE , FG , rectae AH , AK , AL in datis angulis,
hoc est parallelae ipsis HN , HR , HS ; erit rectangulum $AH\alpha$ aequale
ipsis AK , $M\beta$; AL , $N\gamma$; simul. Est enim propter parallelas, AM
ad AK , ut (NH ad HR , hoc est ex constructione, ut) $M\beta$ ad $\alpha\delta$. qua-
re rectangulum AM , $\alpha\delta$ aequale est ipfi AK , $M\beta$. Similiter est AN ad
 AL , ut (NH ad HS , hoc est ut) $N\gamma$ ad $\delta\epsilon$; quare rectangulum AN , $\delta\epsilon$
aequale est ipfi AL , $N\gamma$. Est autem ex constructione $H\epsilon$ ad O , ut P
ad AH ; ergo rectangulum $AH\epsilon$ aequale est contento ipsis O , P , hoc
est ex constructione rectangulis HM , $\alpha\delta$; HN , $\delta\epsilon$; addatur commune
rectangulum AH , $\alpha\epsilon$ seu rectangula AH , $\alpha\delta$; AH , $\delta\epsilon$; et rectangulum
 $AH\alpha$ aequale erit (ipsis AH , $\alpha\delta$; AH , $\delta\epsilon$; HM , $\alpha\delta$; HN , $\delta\epsilon$; hoc est
[1. 2.] ipsis AM , $\alpha\delta$; AN , $\delta\epsilon$; hoc est ut jam ostensum) rectangulis AK ,
 $M\beta$; AL , $N\gamma$.

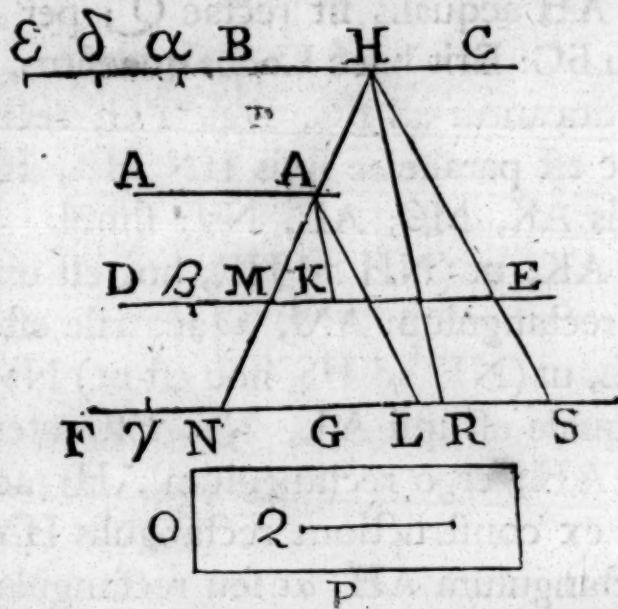
Cas. 2. Quando punctum A ca-
dit inter extremam primam et me-
diam parallelam.

Sit punctum A inter parallelas
 BC , DE , reliquis ut in praecedente
casu manentibus. Et eodem mo-
do quo in eo sumptis rectis $\alpha\delta$, $\delta\epsilon$,
etiam ut ibi ostendetur rectangu-
lum $AH\alpha$ aequale ipsis AM , $\alpha\delta$;
 AN , $\delta\epsilon$ simul; additoque communi
rectangulo AH , $\alpha\epsilon$; erit rectangu-
lum $AH\epsilon$ aequale (ipsis AH , $\alpha\delta$;



AH, $\delta\epsilon$; AM, $\alpha\delta$; AN, $\delta\epsilon$; hoc est) ipsis HM, $\alpha\delta$; HN, $\delta\epsilon$; et dantur HM, HN, $\alpha\delta$, $\delta\epsilon$, H ϵ ; quare datur AH. Et punctum A tanget rectam positione datam ut in praecedente casu ostensum.

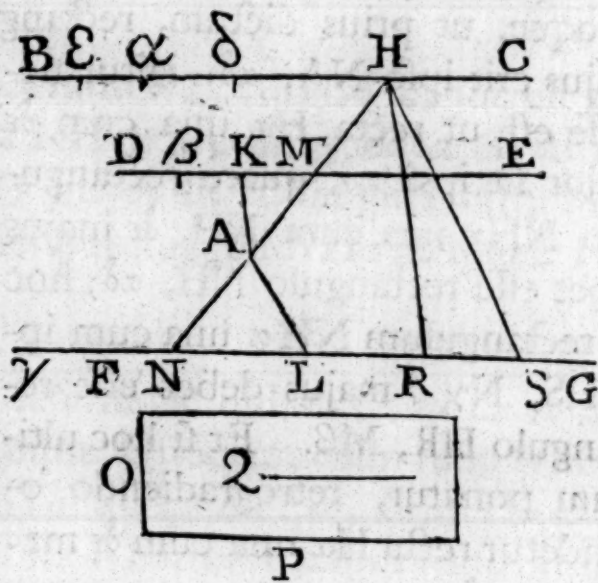
Ductis vero HN, HR, HS, et inventis rectis $\alpha\delta$, $\delta\epsilon$, ut in praecedente compositione, ponantur ipsae a puncto α in recta H α producta; et quoniam punctum A ex hypothesi est inter parallelas BC, DE, necesse est ut MH major sit AH; quare rectangulum MH ϵ majus debet esse (ipso AH ϵ , hoc est) ipsis HM, $\alpha\delta$; HN, $\delta\epsilon$. et ablato communi rectangulo MH, $\alpha\epsilon$; seu MH, $\alpha\delta$ una cum MH, $\delta\epsilon$; debet reliquum MH α majus esse reliquo MN, $\delta\epsilon$. Ergo debet ratio MH ad MN major esse ratione ($\delta\epsilon$ ad H α , hoc est ratione rectanguli NH, $\delta\epsilon$ ad ipsum NH α , hoc est) ratione rectanguli HS, N γ ad ipsum NH α , quia sc. est NH ad HS, ut N γ ad $\delta\epsilon$. Sit igitur ratio quam habet MH ad MN major ratione quam habet rectangulum HS, N γ ad ipsum NH α ; rectangulisque HM, $\alpha\delta$; HN, $\delta\epsilon$ simul aequale fiat contentum rectis O, P; et ut recta H ϵ ad O, ita fiat P ad quartam Q, et ponatur in recta HN a puncto H recta HA aequalis ipsi Q. Erit igitur rectangulum AH ϵ aequale ipsi O, P hoc est ipsis HM, $\alpha\delta$; HN, $\delta\epsilon$ simul. Et quoniam ratio MH ad MN major est (ratione rectanguli HS, N γ ad ipsum NH α , hoc est ratione NH, $\delta\epsilon$ ad NH α , hoc est) ratione $\delta\epsilon$ ad H α , erit rectangulum MH α majus ipso MN, $\delta\epsilon$. addatur commune MH, $\alpha\epsilon$; et rectangulum MH ϵ majus erit (rectangulis MH, $\alpha\epsilon$; MN, $\delta\epsilon$; hoc est ipsis HM, $\alpha\delta$; HN, $\delta\epsilon$; hoc est) ipso AH ϵ . quare MH major est AH, et punctum A cadet inter rectas BC, DE. per ipsum ducatur AA parallela ipsi BC; erit haec Locus quaesitus. Ducantur enim a quovis in ipsa puncto A rectae AH, AK, AL ut in praecedente



praecedente casu. Et quoniam rectangulum $AH\epsilon$ aequale est ipsis $HM, \alpha\delta$; $HN, \delta\epsilon$; ablato communi $AH, \alpha\epsilon$; erit rectangulum $AH\alpha$ aequale ipsis ($AM, \alpha\delta$; $AN, \delta\epsilon$; hoc est ipsis) $AK, M\beta$; $AL, N\gamma$.

Cas. 3. Quando punctum A est inter mediam parallelam et extremam secundam.

Sit jam punctum A inter parallelas DE, FG , reliquis ut in primo casu manentibus; et, ut in eo, sumptis rectis $\alpha\delta, \delta\epsilon$, etiam ut ibi ostendatur rectangulum $AH\alpha$ aequale ipsis $AM, \alpha\delta$; $AN, \delta\epsilon$; additisque rectangulis $NA, H\alpha$; $NA, \alpha\delta$; erit rectangulum $NH\alpha$ simul cum $NA, \alpha\delta$ aequale ipsis $NM, \alpha\delta$; $NA, H\alpha$; $NA, \delta\epsilon$. Rectangula vero $NH\alpha$; $NM, \alpha\delta$; vel sunt inaequalia, vel inter se aequalia. Primo sint inaequalia, excessus igitur rectanguli $NA, H\alpha$ una cum ipso $NA, \delta\epsilon$ et ipsius $NA, \alpha\delta$ aequalis est excessui rectanguli $NH\alpha$ ipsiusque $NM, \alpha\delta$; hoc est spatio dato. Et datae sunt rectae $H\alpha, \delta\epsilon$ et $\alpha\delta$; ergo et AN data est; positione autem data est FG , datusque est angulus ANF ; ergo tangit punctum A rectam positione datam per Prop. 20. hujus.



Quoniam vero rectangulum $NH\alpha$ una cum $NA, \alpha\delta$ aequale est ipsis $NM, \alpha\delta$; $NA, H\alpha$; $NA, \delta\epsilon$; si rectangulum $NH\alpha$ majus aut minus fuerit ipso $NM, \alpha\delta$; erit rectangulum $NA, H\alpha$ una cum $NA, \delta\epsilon$; majus aut minus ipso $NA, \alpha\delta$: ideoque recta $H\alpha$ una cum $\delta\epsilon$ major aut minor debet esse ipsa $\alpha\delta$. Et quoniam, ex iis quae data sunt in Propositione, hoc non semper obtineat, Locus non semper construi poterit; inquirendum igitur est ex quibus conditionibus magnitudinum datarum utrumlibet ex istis duobus necessario eveniet.

Ducantur igitur rectae HN, HR, HS et inveniantur $\alpha\delta, \delta\epsilon$ ut in compositione primi casus ostensum fuit, quarum $\alpha\delta$ ponatur in recta aH

α H a puncto α versus partes puncti H; $\delta\epsilon$ vero ponatur a puncto δ versus contrarias partes.

• Et primo sit rectangulum NH α majus ipso NM, $\alpha\delta$; ergo ratio NH ad NM major erit ratione ($\alpha\delta$ ad H α , hoc est ratione rectanguli NH, $\alpha\delta$ ad ipsum NH α , hoc est ratione) rectanguli HR, M β * ad NH α .

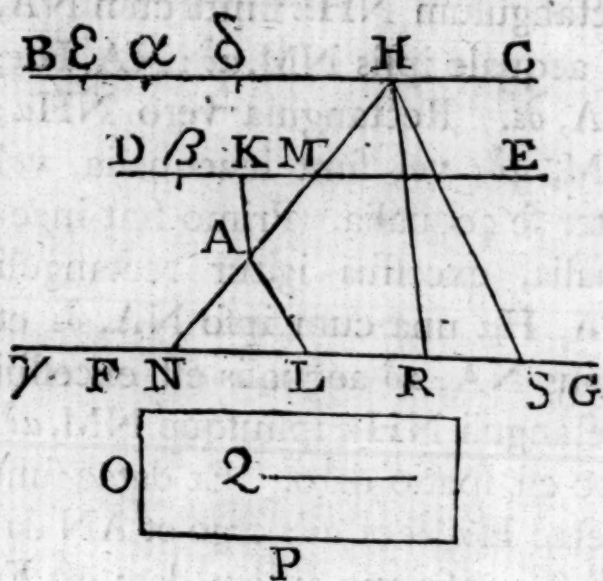
Prima igitur hypothesis magnitudinum datarum sit haec, viz. rationem NH ad NM majorem esse ratione rectanguli HR, M β ad ipsum NH α ; et retrogradiendo ostendetur rectangulum NH α majus ipso NM, $\alpha\delta$; ideoque, ut prius dictum, rectangulum NA, H α una cum NA, $\delta\epsilon$ majus erit ipso NA, $\alpha\delta$. igitur necesse est ut recta H α una cum $\delta\epsilon$ major sit ipsa $\alpha\delta$, quare rectangulum NH α una cum NH, $\delta\epsilon$ majus debet esse rectangulo NH, $\alpha\delta$; hoc est rectangulum NH α una cum ipso HS, N γ † majus debet esse rectangulo HR, M β . Et si hoc ultimum ponatur, retrogradiendo ostendetur recta H α una cum $\delta\epsilon$ major ipsa $\alpha\delta$.

Praeterea quoniam requiritur ut punctum A sit inter parallelas DE, FG, debet recta NM major esse ipsa NA. Ostensum autem fuit rectangulum NH α una cum NA, $\alpha\delta$ aequale rectangulis (NM, $\alpha\delta$; NA, H α ; NA, $\delta\epsilon$; hoc est ipsis) NM, $\alpha\delta$; NA, $\alpha\delta$; NA, H ϵ ; quia sc. H α una cum $\delta\epsilon$ aequalis est ipsis $\alpha\delta$, H ϵ simul. et ablato communi NA, $\alpha\delta$; erit NH α aequale ipsis NM, $\alpha\delta$; NA, H ϵ . Et quoniam NM major est NA, erit rectangulum NM, $\alpha\delta$ una cum NM, H ϵ majus (rectangulis NM, $\alpha\delta$; NA, H ϵ simul, hoc est) ipso NH α . quare, propter $\alpha\delta$, H ϵ simul aequales ipsis H α , $\delta\epsilon$, erit rectangulum NM, H α una cum NM, $\delta\epsilon$ majus ipso NH α ; et ablato

* quia sc. est NH ad HR, ut M β ad $\alpha\delta$.

† quia est NH ad HS, ut N γ ad $\delta\epsilon$.

communi



communi NM, $H\alpha$, erit NM, $\delta\epsilon$ majus ipso $MH\alpha$. Ergo ratio NM ad MH major debet esse ratione ($H\alpha$ ad $\delta\epsilon$, hoc est ratione rectanguli $NH\alpha$ ad ipsum NH, $\delta\epsilon$; hoc est ratione) rectanguli $NH\alpha$ ad rectangulum HS, $N\gamma$. Et contra, si ratio NM ad MH major fuerit ratione re- C
ctanguli $NH\alpha$ ad ipsum HS, $N\gamma$, retrogradiendo ostendetur rectangulum NM, $\delta\epsilon$ majus ipso $MH\alpha$; additoque communi NM, $H\alpha$, erit NM, $H\alpha$ una cum NM, $\delta\epsilon$ majus ($NH\alpha$, hoc est) ipsis NM, $\alpha\delta$; NA, $H\epsilon$. quare et NM, $\alpha\delta$ una cum NM, $H\epsilon$ majus erit ipsis NM, $\alpha\delta$; NA, $H\epsilon$. et recta NM propterea major erit ipsa NA.

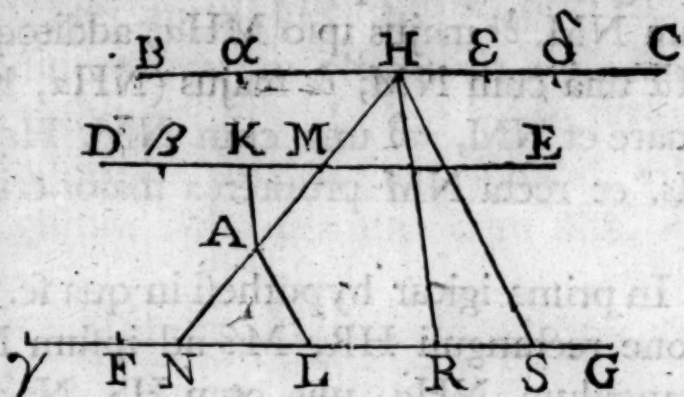
In prima igitur hypothefi in qua sc. ratio NH ad NM major est ratione rectanguli HR, $M\beta$ ad ipsum $NH\alpha$, necesse quoque est ut rectangulum $NH\alpha$, una cum HS, $N\gamma$ majus sit rectangulo HR, $M\beta$; et ut ratio NM ad MH major sit ratione rectanguli $NH\alpha$ ad ipsum HS, $N\gamma$.

Ultima vero haec conditio sufficit determinationi; nam ex ea et hypothefi, altera conditio necessario sequitur. Quoniam enim ratio NM ad D
MH major est ratione rectanguli $NH\alpha$ ad ipsum HS, $N\gamma$; erit ratio HS, $N\gamma$ ad $NH\alpha$ major ratione MH ad NM. Et componendo erit ratio rectanguli $NH\alpha$ una cum ipso HS, $N\gamma$ ad $NH\alpha$ major ratione NH ad NM. ratio autem NH ad NM ex hypothefi major est ratione rectanguli HR, $M\beta$ ad ipsum $NH\alpha$; multo igitur ratio rectanguli $NH\alpha$ una cum HS, $N\gamma$ ad $NH\alpha$ major erit ratione rectanguli HR, $M\beta$ ad idem $NH\alpha$. Ergo rectangulum $NH\alpha$ una cum HS, $N\gamma$ majus est ipso HR, $M\beta$; quae fuit altera conditio. Ex hac autem et hypothefi non sequitur secunda conditio, nec ex duabus conditionibus sequitur hypothefis.

Secundo fit rectangulum $NH\alpha$ minus ipso NM, $\alpha\delta$; et similiter ostendetur debere rationem NH ad NM minorem esse ratione rectanguli HR, $M\beta$ ad ipsum $NH\alpha$.

Secunda

Secunda igitur hypothesis sit haec; rationem NH ad NM minorem esse ratione rectanguli HR , $M\beta$ ad ipsum $NH\alpha$; et retrogradiendo ostendetur rectangulum $NH\alpha$ minus esse ipso NM , $\alpha\delta$. Igitur quoniam ostensum fuit rectangulum $NH\alpha$ una cum ipso NA , $\alpha\delta$ aequale ipsis NM , $\alpha\delta$; NA , $H\alpha$; NA , $\delta\epsilon$; erit rectangulum NA , $H\alpha$ una cum NA , $\delta\epsilon$ minus ipso NA , $\alpha\delta$. Ergo recta $H\alpha$ una cum $\delta\epsilon$ minor debet esse ipsa $\alpha\delta$. quare rectangulum $NH\alpha$ una cum NH , $\delta\epsilon$ minus debet esse rectangulo NH , $\alpha\delta$; hoc est rectangulum $NH\alpha$ una cum HS , $N\gamma$ minus debet esse rectangulo HR , $M\beta$. Et si hoc ultimum ponatur, retrogradiendo ostendetur recta $H\alpha$ una cum $\delta\epsilon$ minor ipsa $\alpha\delta$.



Praeterea requiritur ut recta NM major sit ipsa NA . est autem rectangulum $NH\alpha$ una cum NA , $\alpha\delta$ aequale ipsis NM , $\alpha\delta$; NA , $H\alpha$; NA , $\delta\epsilon$; et recta $\alpha\delta$ in hoc casu aequalis est ipsis αH , $H\epsilon$, $\epsilon\delta$ simul; ablati igitur utrinque rectangulis NA , $H\alpha$; NA , $\delta\epsilon$; erit $NH\alpha$ una cum ipso NA , $H\epsilon$ aequale rectangulo NM , $\alpha\delta$. Et quoniam NM major est ipsa NA , erit rectangulum $NH\alpha$ una cum NM , $H\epsilon$ majus (eodem $NH\alpha$ una cum ipso NA , $H\epsilon$ hoc est) rectangulo NM , $\alpha\delta$; et ablati utrinque rectangulis NM , $H\alpha$; NM , $H\epsilon$; erit rectangulum $MH\alpha$ majus ipso NM , $\delta\epsilon$. Ergo ratio NM ad MH minor est ratione ($H\alpha$ ad $\delta\epsilon$ hoc est ratione rectanguli $NH\alpha$ ad ipsum NH , $\delta\epsilon$; hoc est ratione) rectanguli $NH\alpha$ ad rectangulum HS , $N\gamma$. Et contra, si ratio NM ad MH minor fuerit ratione $NH\alpha$ rectanguli ad ipsum HS , $N\gamma$; retrogradiendo ostendetur rectangulum $MH\alpha$ majus ipso NM , $\delta\epsilon$; et recta NM major NA .

Si igitur ratio NH ad NM minor sit ratione rectanguli HR , $M\beta$ ad ipsum $NH\alpha$, necesse quoque est ut rectangulum $NH\alpha$ una cum HS , $N\gamma$ minus sit ipso HR , $M\beta$; et ut ratio NM ad MH minor sit ratione rectanguli

Hiscæ determinationibus præmissis, componetur casus tertius in duabus prædictis hypothesibus ita.

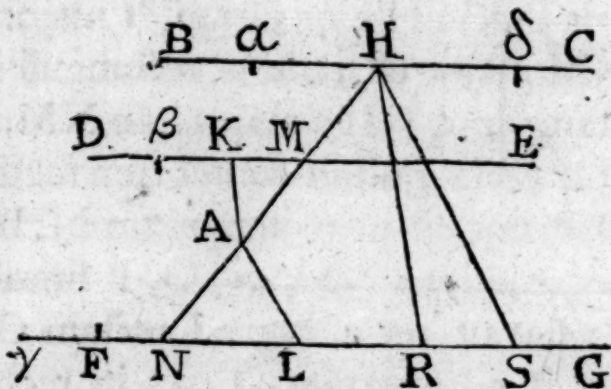
K

am

am ostensum fuit rectangulum $NH\alpha$ una cum NA , $\alpha\delta$ aequale ipsis NM , $\alpha\delta$; NA , $H\alpha$; NA , $\delta\epsilon$; ablati utrinque rectangulis NA , $H\alpha$; NA , $\alpha\delta$; erit rectangulum $AH\alpha$ aequale ipsis (AM , $\alpha\delta$; NA , $\delta\epsilon$; hoc est ipsis) AK , $M\beta$; AL , $N\gamma$.

2^{do}. Idem autem eodem modo demonstrabitur in secunda hypothesi, in qua ratio NH ad NM minor est ratione rectanguli HR , $M\beta$ ad ipsum $NH\alpha$; et in qua propterea debet etiam ratio NM ad MH minor esse ratione rectanguli $NH\alpha$ ad ipsum HS , $N\gamma$.

Sit jam rectangulum $NH\alpha$ aequale ipsi NM , $\alpha\delta$; et quoniam rectangulum $NH\alpha$ una cum ipso NA , $\alpha\delta$ aequale est rectangulis NM , $\alpha\delta$; NA , $H\alpha$; NA , $\delta\epsilon$; erit reliquum, rectangulum sc. NA , $H\alpha$ una cum ipso NA , $\delta\epsilon$ aequale reliquo NA , $\alpha\delta$. Recta igitur NA minime data erit, et propterea punctum A ubicunque sumi poterit inter parallelas DE , FG , inter quas ex hypothesi locandum est.



Quoniam vero rectangulum $NH\alpha$ aequale est ipsi NM , $\alpha\delta$; erit ratio NH ad NM eadem rationi ($\alpha\delta$ ad $H\alpha$, hoc est rationi rectanguli NH , $\alpha\delta$ ad ipsum $NH\alpha$, hoc est rationi) rectanguli HR , $M\beta$ ad rectangulum $NH\alpha$.

Tertia igitur hypothesis magnitudinum datarum sit haec; rationem rectae NH ad NM , eandem esse rationi rectanguli HR , $M\beta$ ad ipsum $NH\alpha$. et retrogradiendo ostendetur rectangulum $NH\alpha$ aequale ipsi NM , $\alpha\delta$; igitur, ut ostensum fuit, erit rectangulum NA , $H\alpha$ una cum NA , $\delta\epsilon$ aequale ipsi NA , $\alpha\delta$. quare necesse est ut recta $H\alpha$ una cum $\delta\epsilon$ aequalis sit ipsi $\alpha\delta$, seu ut punctum ϵ incidat in H . Ideoque rectangulum $NH\alpha$ una cum NH , $\delta\epsilon$ aequale debet esse ipsi NH , $\alpha\delta$; hoc est rectangulum $NH\alpha$ una cum HS , $N\gamma$ aequale debet esse rectangulo HR , $M\beta$. Et si hoc ultimum ponatur, retrogradiendo ostendetur recta $H\alpha$ una cum $\delta\epsilon$ aequalis ipsi $\alpha\delta$.

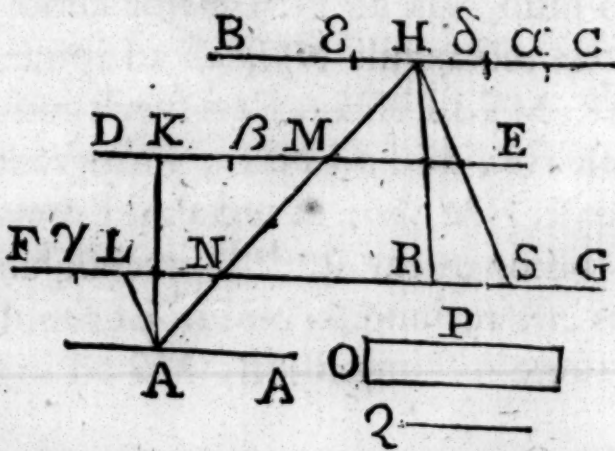
Compo-

Componetur hoc ita.

Ductis rectis NH, HR, HS, &c. ut in praecedente compositione; sit NH ad NM, ut rectangulum HR, Mβ ad ipsum NHα; et simul sit rectangulum NHα una cum HS, Nγ aequale ipsi HR, Mβ. Sumatur vero quodcunque punctum A inter parallelas DE, FG, et ab ipso ducantur rectae AH, AK, AL ut in primo casu; erit rectangulum AHα aequale ipsis AK, Mβ; AL, Nγ. Quoniam enim ratio NH ad NM eadem est rationi rectanguli HR, Mβ ad ipsum NHα, erit, ut ostensum, NHα aequale ipsi NM, αδ. Et quoniam rectangulum NHα una cum HS, Nγ aequale est ipsi HR, Mβ, erit recta Hα una cum δε aequalis ipsi αδ. Ergo rectangulum NA, αδ aequale est ipsis NA, Hα; NA, δε. additisque aequalibus NHα; NM, αδ; erit NHα una cum NA, αδ aequale ipsis NM, αδ; NA, Hα; NA, δε. et utrinque ablatiis NA, Hα; NA, αδ; erit AHα aequale ipsis (AM, αδ; NA, δε; hoc est ipsis) AK, Mβ; AL, Nγ. Quare Locus in hoc ultimo membro casus tertii vertitur in Theorema.

Cas. 4. Quando punctum A est extra parallelas ad partes secundae extremæ FG.

Reliquis ut in primo casu manentibus, sumptisque ut in eo rectis $\alpha\delta$, $\delta\epsilon$; ostendetur, ut ibi, rectangulum $AH\alpha$ aequale ipsis AM , $\alpha\delta$; AN , $\delta\epsilon$; additisque utrinque rectangulis MH , $\alpha\delta$; NH , $\delta\epsilon$; erunt rectangula $AH\alpha$; MH , $\alpha\delta$; NH , $\delta\epsilon$; simul aequalia ipsis AH , $\alpha\delta$; AH , $\delta\epsilon$; horum igitur excessus supra rectangulum $AH\alpha$ aequalis est ipsis MH , $\alpha\delta$; NH , $\delta\epsilon$, hoc est spatio dato. et datae sunt $H\alpha$, $\alpha\delta$, $\delta\epsilon$, quare data est AH ; et punctum A tanget rectam positione datam, ut in casu primo ostensum fuit.



Ducantur rectae HN, HR, HS; et inveniantur rectae $\alpha\delta$, $\delta\epsilon$, ut in

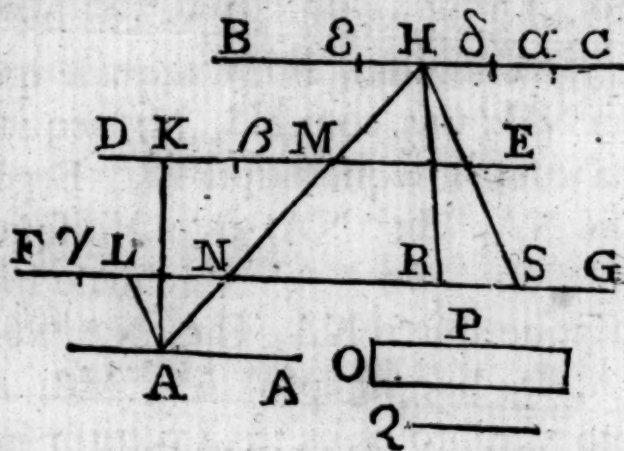
K 2

primo

primo casu, quarum $\alpha\delta$ ponatur in recta $H\alpha$, a puncto α versus H , et $\delta\epsilon$ versus easdem partes. Et quoniam rectangulum AH , $\alpha\delta$ una cum AH , $\delta\epsilon$ majus est ipso $AH\alpha$, debet recta $\alpha\delta$ una cum $\delta\epsilon$ major esse ipsa $H\alpha$; ideoque rectangulum NH , $\alpha\delta$ una cum NH , $\delta\epsilon$, hoc est rectangulum HR , $M\beta$ una cum HS , $N\gamma$ majus debet esse rectangulo $NH\alpha$. Et si fuerit rectangulum HR , $M\beta$ una cum HS , $N\gamma$ majus ipso $NH\alpha$, retrogradiendo ostendetur $\alpha\delta$ uno cum $\delta\epsilon$ major recta $H\alpha$.

Praeterea quoniam requiritur punctum A inveniri extra parallelas ad partes ipsius FG , debet AH major esse NH . Est autem rectan-

gulum $AH\alpha$ simul cum ipsis MH , $\alpha\delta$; NH , $\delta\epsilon$; aequale (ipsis AH , $\alpha\delta$; AH , $\delta\epsilon$; hoc est) rectangulo AH , $\alpha\epsilon$; ablato igitur communi $AH\alpha$, erunt MH , $\alpha\delta$; NH , $\delta\epsilon$; simul aequalia ipsi $AH\epsilon$. Et quoniam recta AH major est ipsa NH ,



erit rectangulum $AH\epsilon$, hoc est rectangulum MH , $\alpha\delta$ una cum NH , $\delta\epsilon$ majus rectangulo $NH\epsilon$. additoque communi NM , $\alpha\delta$; erit rectangulum NH , $\alpha\delta$ una cum NH , $\delta\epsilon$ majus ipsis NM , $\alpha\delta$; $NH\epsilon$. ablatoque communi $NH\epsilon$, erit rectangulum $NH\alpha$ majus ipso NM , $\alpha\delta$. Ergo ratio NH ad NM major debet esse ratione ($\alpha\delta$ ad $H\alpha$, hoc est ratione rectanguli NH , $\alpha\delta$ ad ipsum $NH\alpha$, hoc est ratione) rectanguli HR , $M\beta$ ad $NH\alpha$. Et si fuerit ratio NH ad NM major ratione rectanguli HR , $M\beta$ ad $NH\alpha$, retrogradiendo ostendetur rectangulum $NH\alpha$ majus NM , $\alpha\delta$; et recta AH major ipsa NH .

Igitur in cas. 4. debet rectangulum HR , $M\beta$ una cum HS , $N\gamma$ majus esse rectangulo $NH\alpha$. Et simul debet ratio NH ad NM major esse ratione rectanguli HR , $M\beta$ ad ipsum $NH\alpha$. Hisce praemissis

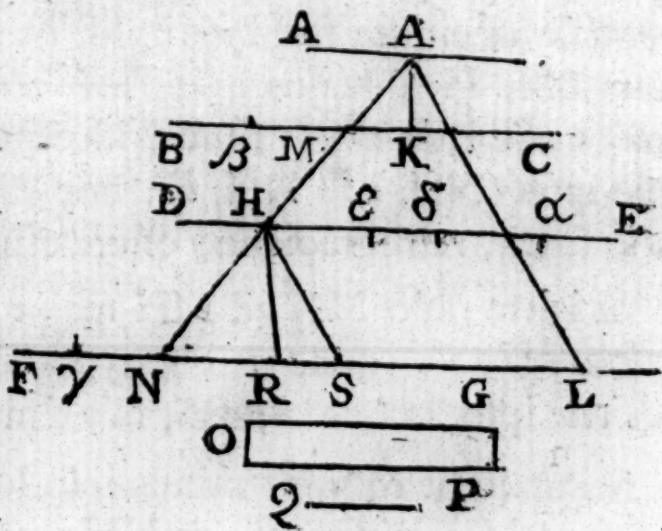
Componetur ita.

Ductis NH , HR ; HS , et inventis positisque rectis $\alpha\delta$, $\delta\epsilon$ ut dictum fuit, quoniam ex praemissa determinatione rectangulum HR , $M\beta$ una cum

cum HS , $N\gamma$ majus est ipso $NH\alpha$, erit $\alpha\delta$ una cum $\delta\epsilon$ major recta Ha . Rectangulis vero MH , $\alpha\delta$; NH , $\delta\epsilon$ simul aequale inveniatur rectangulum contentum O , P rectis; et ut $H\epsilon$ ad O , ita fiat P ad quartam HA quae in recta HN ponatur a puncto H versus N . Rectangulum igitur O, P hoc est rectangulum MH , $\alpha\delta$ una cum NH , $\delta\epsilon$ aequale erit rectangulo $AH\epsilon$. additoque communi $AH\alpha$, erit rectangulum $AH\alpha$ una cum ipsis MH , $\alpha\delta$; NH , $\delta\epsilon$; aequale (ipsi AH , $\alpha\epsilon$, hoc est) ipsis AH , $\alpha\delta$; AH , $\delta\epsilon$. Ergo quoniam, ex reliqua parte determinationis, est ratio NH ad NM major ratione rectanguli HR , $M\beta$ ad $NH\alpha$, erit recta AH major NH . Cadit igitur punctum A extra parallelas ad partes ipsius FG . per ipsum ducatur recta ipsi BC parallela, Erit haec Locus quaesitus. Sumatur enim in ea punctum quodvis A , et ab ipso ducantur rectae ad parallelas, ut in primo casu; et quoniam ostensum fuit rectangulum $AH\alpha$ una cum ipsis MH , $\alpha\delta$; NH , $\delta\epsilon$ aequale ipsis AH , $\alpha\delta$; AH , $\delta\epsilon$; ablatis utrinque rectangulis MH , $\alpha\delta$; NH , $\delta\epsilon$; erit rectangulum $AH\alpha$ aequale ipsis (AM , $\alpha\delta$; AN , $\delta\epsilon$; hoc est ipsis) AK , $M\beta$; AL , $N\gamma$.

Cas. 5. Quando punctum A est extra parallelas ad utraque partes; recta vero quae ad parallelam mediam ducta est, continet cum recta data rectangulum aequale duobus reliquis rectangulis, quae sc. continentur ductis ad reliquas parallelas, et datis rectis.

Sit punctum A extra parallelas; puta ad partes ipsius BC . et ad BC , DE , FG ductae sint in datis angulis, rectae AK , AH , AL , quarum AH occurrat ipsis BC , FG in M , N punctis; sitque rectangulum contentum AH et data recta Ha aequale contento AK et data $M\beta$ una cum contento AL et data $N\gamma$. Et sumptis rectis $\alpha\delta$, $\delta\epsilon$ ut in primo casu, ostendetur ut in eo rectangu-



lunx

et $H\alpha$ minor ostendetur ipsis $\alpha\delta$, $\delta\epsilon$ simul; ideoque et $NH\alpha$ minus erit ipsis HR , $M\beta$; HS , $N\gamma$ simul; et contra.

Si igitur ratio MN ad MH minor fuerit ratione rectanguli $NH\alpha$ ad ipsum HS , $N\gamma$ (quae sit secunda hypothesis) debet rectangulum $NH\alpha$ minus esse ipsis HR , $M\beta$; HS , $N\gamma$.

His praemissis componetur Cas. 5. in duabus praedictis hypothese-
sibus ita.

Ductis HN , HR , HS , et inventis positisque rectis $\alpha\delta$, $\delta\epsilon$ ut dictum fuit; Primo sit ratio rectae MN ad MH major ratione rectanguli $NH\alpha$ ad HS , $N\gamma$; et simul sit rectangulum $NH\alpha$ majus ipsis HR , $M\beta$; HS , $N\gamma$ simul. Igitur propter ultimam hanc conditionem, erit recta $H\alpha$ major ipsis $\alpha\delta$, $\delta\epsilon$ simul, ut prius ostensum. Et quoniam ratio MN ad MH major est ratione $NH\alpha$ ad HS , $N\gamma$; erit, ut ostensum fuit, rectangulum MN , $\delta\epsilon$ majus ipso $MH\alpha$. Ipsorum excessui aequale fiat rectangulum rectis O , P contentum; hoc est sit rectangulum MN , $\delta\epsilon$ aequale ipsis $MH\alpha$; O , P simul. Et ut $H\epsilon$ ad O , ita fiat P ad quartam MA , quae ponatur in recta HM producta extra parallelas ad partes ipsius BC . et per punctum A ducatur recta ipsi BC parallela; Erit haec Locus quaesitus. a quovis enim puncto A in ipsa, ducantur ad parallelas DE , BC , FG rectae AH , AK , AL parallelae ipsis HN , HR , HS . Et quoniam ex constructione, rectangulum AM , $H\epsilon$ aequale est ipsi O , P ; addito communi $MH\alpha$, erit $MH\alpha$ una cum AM , $H\epsilon$ aequale (ipsis $MH\alpha$; O , P ; hoc est) ipsi MN , $\delta\epsilon$. addatur utrinque rectangulum AM , $\alpha\epsilon$; seu AM , $\alpha\delta$ una cum AM , $\delta\epsilon$; et erit $MH\alpha$ una cum AM , $H\alpha$, hoc est erit $AH\alpha$ aequale ipsis (AM , $\alpha\delta$; AN , $\delta\epsilon$; hoc est ipsis) AK , $M\beta$; AL , $N\gamma$ rectangulis.

2^{do}. Idem autem eodem modo ostendetur in secunda hypothesisi in qua sc. ratio MN ad MH minor est ratione rectanguli $NH\alpha$ ad ipsum HS , $N\gamma$; et in qua propterea debet rectangulum $NH\alpha$ minus esse ipsis HR , $M\beta$; HS , $N\gamma$.

Jam sit rectangulum $MH\alpha$ aequale ipsi MN , $\delta\epsilon$; et quoniam rectangulum AM , $H\alpha$ una cum $MH\alpha$ aequale est ipsis AM , $\alpha\delta$; AM , $\delta\epsilon$;

$\delta\epsilon$; MN , $\delta\epsilon$; erit rectangulum AM , $H\alpha$ aequale ipsis AM , $\alpha\delta$; AM , $\delta\epsilon$. Recta igitur MA minime data crit, et propterea punctum A ubicunque sumi poterit extra parallelas ad partes ipsius BC , ad quas ex hypothesi locandum est.

Quoniam vero rectangulum MN , $\delta\epsilon$ aequale est ipsi $MH\alpha$, erit ratio MN ad MH eadem rationi ($H\alpha$ ad $\delta\epsilon$, hoc est rationi rectanguli $NH\alpha$ ad ipsum NH , $\delta\epsilon$, hoc est rationi) rectanguli $NH\alpha$ ad rectangulum HS , $N\gamma$.

Si igitur ratio rectae MN ad MH eadem fuerit rationi rectanguli $NH\alpha$ ad ipsum HS , $N\gamma$ (quae sit tertia hypothesis) retrogradiendo ostendetur rectangulum $MH\alpha$ aequale ipsi MN , $\delta\epsilon$. igitur, ut ostensum fuit, rectangulum AM , $H\alpha$ aequale erit ipsis AM , $\alpha\delta$; AM , $\delta\epsilon$; quare necesse est ut recta $H\alpha$ aequalis sit ipsis $\alpha\delta$, $\delta\epsilon$ simul; et propterea rectangulum $NH\alpha$ aequale debet esse ipsis (NH , $\alpha\delta$; NH , $\delta\epsilon$; hoc est ipsis) HR , $M\beta$; HS , $N\gamma$ simul. Et si hoc ultimum ponatur retrogradiendo ostendetur recta $H\alpha$ aequalis ipsis $\alpha\delta$, $\delta\epsilon$.

Componetur vero ita.

Ductis rectis HN , HR , HS ; et inventis positisque rectis $\alpha\delta$, $\delta\epsilon$ ut in praecedente compositione; sit MN ad MH , ut rectangulum $NH\alpha$ ad ipsum HS , $N\gamma$; et simul sit $NH\alpha$ aequale rectangulis HR , $M\beta$; HS , $N\gamma$. Sumatur vero quodcunque punctum A extra parallelas ad partes ipsius BC , et ab ipso ad rectas DE , BC , FG ducantur rectae AH , AK , AL parallelae ipsis HN , HR , HS ; erit rectangulum $AH\alpha$ aequale ipsis AK , $M\beta$; AL , $M\gamma$: nam quoniam ratio rectae MN ad MH eadem est rationi rectanguli $NH\alpha$ ad ipsum HS , $N\gamma$, erit, ut prius ostensum, rectangulum $MH\alpha$ aequale ipsi MN , $\delta\epsilon$. Et quoniam rectangulum $NH\alpha$ aequale est ipsis HR , $M\beta$; HS , $N\gamma$; erit recta $H\alpha$ aequale ipsis $\alpha\delta$, $\delta\epsilon$ simul. Ergo rectangulum AM , $H\alpha$ aequale est ipsis AM , $\alpha\delta$; AM , $\delta\epsilon$; hisce addantur aequalia rectangula $MH\alpha$; MN , $\delta\epsilon$; et rectangulum AM , $H\alpha$ una cum $MH\alpha$ aequale erit ipsis AM , $\alpha\delta$; AM , $\delta\epsilon$; MN , $\delta\epsilon$; hoc est rectangulum $AH\alpha$ aequale erit ipsis (AM , $\alpha\delta$; AN , $\delta\epsilon$; hoc est ipsis) AK , $M\beta$; AL , $N\gamma$. Quare et in hoc casu Locus vertitur in Theorema.

Car. 6.

Cas. 6. Quando punctum A est inter parallelas, et ducta ab ipso ad parallelam mediam continet cum recta data rectangulum aequale duobus reliquis.

Sit punctum A inter parallelas, puta inter ipsas BC, DE. et ductis ad BC, DE, FG rectis AK, AH, AL in datis angulis; sit rectangulum contentum AH, et data recta H α aequale contento AK, et data M β , una cum contento AL et data N γ .

Et sumantur rectae $\alpha\delta$, $\delta\epsilon$ ut in casu primo, utque in eo ostendetur rectangulum AH α , aequale ipsis AM, $\alpha\delta$;

AN, $\delta\epsilon$. addatur commune AH, $\alpha\delta$;

et rectangulum AH α una cum AH, $\alpha\delta$ aequale erit ipsis MH, $\alpha\delta$;

AH, $\delta\epsilon$; HN, $\delta\epsilon$. Excessus igitur rectanguli AH α una cum ipso AH, $\alpha\delta$ supra rectangulum AH, $\delta\epsilon$ aequalis erit

rectangulis MH, $\alpha\delta$; HN, $\delta\epsilon$; hoc est spatio dato: et datae sunt H α , $\alpha\delta$, $\delta\epsilon$;

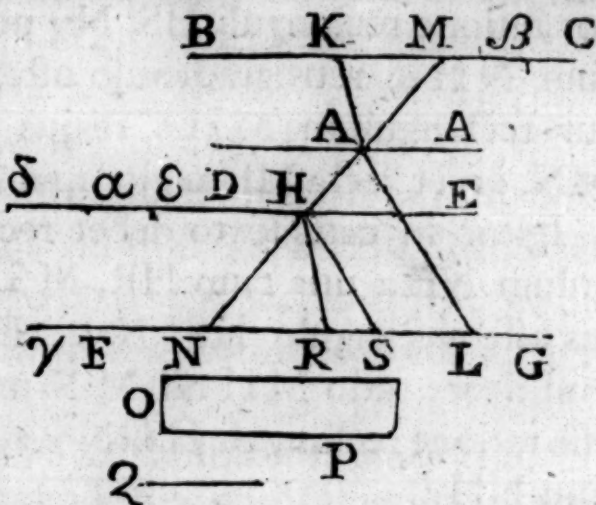
quare data est AH. Positione autem data est DE, datusque est angulus AHD; ergo tangit punctum A rectam positione datam per Prop. 20. hujus.

Ducantur rectae HN, HR, HS ut in praecedente casu; et inveniantur rectae $\alpha\delta$, $\delta\epsilon$ ut in casu primo, quarum $\alpha\delta$ ponatur in H α producta ad partes α , $\delta\epsilon$ vero ad contrarias. Et quoniam auferendum est rectangulum AH, $\delta\epsilon$ ex ipsis AH α ; AH, $\alpha\delta$; necesse est ut H α una cum $\alpha\delta$ major sit ipsa $\delta\epsilon$. quare rectangulum NH α una cum NH, $\alpha\delta$ majus debet esse ipso NH, $\delta\epsilon$; hoc est debet NH α una cum HR, M β majus esse rectangulo HS, N γ . Et si hoc fuerit, retrogradiendo ostendetur H α una cum $\alpha\delta$ major recta $\delta\epsilon$.

Praeterea quoniam requiritur ut punctum A sit inter parallelas BC, DE, debet MH major esse quam AH. ostensum autem fuit rectangulum AH α una cum AH, $\alpha\delta$; hoc est rectangulum AH δ , aequale ipsis MH, $\alpha\delta$; AH, $\delta\epsilon$; HN, $\delta\epsilon$; ablato igitur rectangulo AH, $\delta\epsilon$, erit re-

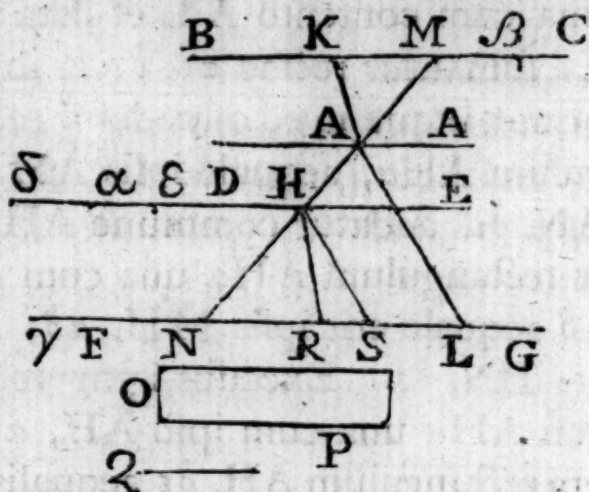
L

ctangulum



ctangulum $AH\epsilon$ aequale ipsis $MH, \alpha\delta$; $HN, \delta\epsilon$. Et quoniam est re-
cta MH major ipsâ AH , erit rectangulum $MH\epsilon$ majus ($AH\epsilon$, hoc est)
ipsis $MH, \alpha\delta$; $HN, \delta\epsilon$. addatur utrinque rectangulum $MH, \epsilon\alpha$; et re-
ctangulum $MH\alpha$ majus erit (ipsis $MH, \delta\epsilon$; $HN, \delta\epsilon$; hoc est) ipso MN ,
 $\delta\epsilon$. Ergo ratio MH ad MN major est ratione ($\delta\epsilon$ ad $H\alpha$; hoc est ra-
tione) rectanguli $NH, \delta\epsilon$ ad ipsum $NH\alpha$; hoc est ratione) rectanguli
 $HS, N\gamma$ ad rectangulum $NH\alpha$. Et si fuerit ratio MH ad MN ma-
jor ratione rectanguli $HS, N\gamma$ ad ip-
sum $NH\alpha$; retrogradiendo ostende-
tur rectangulum $MH\alpha$ majus ipso
 $MN, \delta\epsilon$; et recta MH major ipsâ AH .

Igitur in casu sexto debet rectan-
gulum $NH\alpha$ una cum $HR, M\beta$ ma-
jus esse rectangulo $HS, N\gamma$. Et si-
mul debet ratio MH ad MN major
esse ratione rectanguli $HS, N\gamma$ ad ip-
sum $NH\alpha$.



Ultima verò haec conditio determinationi hujus casus sufficit, ex ea
enim necessario sequitur prima. Nam ratio MH ad MN est minoris
ad majorem, quare cum sit ratio MH ad MN , major ratione rectan-
guli $HS, N\gamma$ ad ipsum $NH\alpha$, erit $HS, N\gamma$ minus rectangulo $NH\alpha$;
ideoque rectangulum $NH\alpha$ majus erit ipso $HS, N\gamma$: multo igitur re-
ctangulum $NH\alpha$ una cum rectangulo $HR, M\beta$ majus erit ipso HS ,
 $N\gamma$; quae fuit prima conditio. Hisce praemissis,

Componetur ita.

Ductis NH, HR, HS , et inventis positisque $\alpha\delta, \delta\epsilon$ ut dictum fuit;
Sit ratio MH ad MN major ratione rectanguli $HS, N\gamma$ ad ipsum $NH\alpha$;
unde, ut jam ostensum, rectangulum $NH\alpha$ una cum $HR, M\beta$ majus
erit rectangulo $HS, N\gamma$. Erit igitur $H\alpha$ una cum $\alpha\delta$ major ipsa $\delta\epsilon$.
Rectangulis vero $MH, \alpha\delta$; $HN, \delta\epsilon$ simul, aequale fiat rectangulum
rectis O, P contentum; et ut $H\epsilon$ ad O , ita fiat P ad quartam HA ,
quae ponatur in recta NH producta versus BC . Est igitur rectangu-
lum $AH\epsilon$ aequale (ipfi O, P hoc est) ipsis $MH, \alpha\delta$; $HN, \delta\epsilon$. addatur
commune

commune AH , $\delta\epsilon$, et rectangula $AH\epsilon$; AH , $\delta\epsilon$; hoc est rectangula $AH\alpha$; AH , $\alpha\delta$ aequalia erunt ipsis MH , $\alpha\delta$; HN , $\delta\epsilon$; AH , $\delta\epsilon$. Ergo quoniam ratio MH ad MN major est ratione rectanguli HS , $N\gamma$ ad ipsum $NH\alpha$, erit MH major HA . Cadit igitur punctum A inter rectas BC , DE . per A ducatur recta parallela ipsi BC ; erit haec Locus quaesitus. Ducantur enim a quovis in ea puncto A rectae ut in casu quinto, et quoniam rectangulum $AH\alpha$ una cum AH , $\alpha\delta$ aequale ostensum est rectangulis MH , $\alpha\delta$; NH , $\delta\epsilon$; AH , $\delta\epsilon$; ablato communi AH , $\alpha\delta$; erit rectangulum $AH\alpha$ aequale ipsis (AM , $\alpha\delta$; AN , $\delta\epsilon$; hoc est ipsis) AK , $M\beta$; AL , $N\gamma$.

Ductis igitur rectis HN , HR , HS ; datisque magnitudine $H\alpha$, $M\beta$, $N\gamma$; erit rectangulum $NH\alpha$ vel majus vel minus ipsis HR , $M\beta$; HS , $N\gamma$ simul, vel iisdem aequale. Et siquidem ipsis majus fuerit, poterit locus inveniri per cas. 1. quando scilicet requiritur ut ducta AH ad unam ex parallelis extremis, rectangulum $AH\alpha$ aequale sit duobus reliquis. Et si simul ratio MH ad MN major fuerit ratione HS , $N\gamma$ ad $NH\alpha$, seu, quod idem est, si fuerit ratio NM ad MH minor ratione $NH\alpha$ ad HS , $N\gamma$ poterit etiam alius locus inveniri per cas. 2. non autem, manentibus hisce duabus conditionibus, per cas. 3. nam ratio NH ad NM est majoris ad minorem, rectangulum vero HR , $M\beta$ minus est ipso $NH\alpha$; quare ratio NH ad NM major est ratione HR , $M\beta$ ad $NH\alpha$, et propterea per determinationem cas. 3. deberet ratio NM ad MH major esse ratione $NH\alpha$ ad HS , $N\gamma$. Est autem ex hypothesis minor, ergo non invenietur locus per cas. 3. et quoniam in casu quarto requiritur rectangulum $NH\alpha$ minus esse ipsis HR , $M\beta$; HS , $N\gamma$ simul, neque per hunc casum poterit Locus inveniri.

Si autem rectangulum $NH\alpha$ majus sit ipsis HR , $M\beta$; HS , $N\gamma$; et simul ratio NM ad MH major sit ratione $NH\alpha$ ad ipsum HS , $N\gamma$; Locus non invenietur per cas. 2. Quoniam vero NH ad NM ostensa est major ratione HR , $M\beta$ ad $NH\alpha$ invenietur Locus per cas. 3.

Jam sit rectangulum $NH\alpha$ minus ipso HR , $M\beta$ una cum HS , $N\gamma$. Locus igitur non invenietur per cas. 1. Sed si simul fuerit ratio NM ad MH minor ratione $NH\alpha$ ad HS , $N\gamma$ poterit inveniri per cas. 2.

Et si praeterea fuerit NH ad NM minor ratione HR , $M\beta$ ad $NH\alpha$, invenietur alius Locus per cas. 3. non autem per 4^{tum}. quia in eo ratio NH ad NM major debet esse ratione HR , $M\beta$ ad $NH\alpha$. Si autem fuerit ratio NH ad NM major ratione HR , $M\beta$ ad $NH\alpha$ manentibus praedictis duabus conditionibus Locus non invenietur per cas. 3. sed per cas. 4.

Si rectangulum $NH\alpha$ minus fuerit ipsis HR , $M\beta$; HS , $N\gamma$; et simul ratio NM ad MH major fuerit ratione $NH\alpha$ ad HS , $N\gamma$; non invenietur Locus per cas. 1. aut cas. 2. Sed si praeterea ratio NH ad NM major fuerit ratione HR , $M\beta$ ad $NH\alpha$, invenietur per cas. 3. et etiam per cas. 4. Sed si fuerit ratio NH ad NM minor ratione HR , $M\beta$ ad $NH\alpha$ manentibus duabus reliquis conditionibus Locus per nullum ex quatuor primis casibus invenietur, adeoque nullo modo construi poterit.

Denique si rectangulum $NH\alpha$ una cum HS , $N\gamma$ aequale fuerit ipsi HR , $M\beta$; et simul fuerit NH ad NM , ut HR , $M\beta$ ad $NH\alpha$ quodcumque punctum inter parallelas DE , FG propositum in propositione efficiet.

Si rectangulum $NH\alpha$ aequale fuerit ipsis HR , $M\beta$; HS , $N\gamma$ simul, non poterit Locus inveniri per cas. 1. 3. aut 4. sed si praeterea fuerit ratio NM ad MH minor ratione $NH\alpha$ ad HS , $N\gamma$ poterit inveniri per cas. 2.

Si vero requiratur ut, ductâ AH ad parallelam mediam, rectangulum $AH\alpha$ aequale sit duobus reliquis, Locus invenietur per cas. 5. sc. Si ratio NM ad MH major fuerit ratione $NH\alpha$ ad HS , $N\gamma$; et simul rectangulum $NH\alpha$ majus sit ipsis HR , $M\beta$; HS , $N\gamma$; non autem per cas. 6. quia in eo requiritur ut ratio NM ad MH minor sit ratione $NH\alpha$ ad HS , $N\gamma$. Si autem, manente prima conditione, $NH\alpha$ non majus fuerit ipsis HR , $M\beta$; HS , $N\gamma$; Locus neque per 5^{tum}. neque per 6^{tum} casum invenietur, et construi non poterit. at si ratio NM ad MH minor sit ratione $NH\alpha$ ad HS , $N\gamma$; invenietur Locus per cas. 6. Et si simul rectangulum $NH\alpha$ minus fuerit ipsis HR , $M\beta$; HS , $N\gamma$; invenietur alius Locus per cas. 5^{tum}. Si vero fuerit NM ad MH , ut

$NH\alpha$

$NH\alpha$ ad HS , $N\gamma$; et simul sit $NH\alpha$ aequale ipsis HR , $M\beta$; HS , $N\gamma$; quodvis punctum extra parallelas ad partes ipsius BC propositum efficiet.

Si autem determinationes casus quinti vel casus sexti obtineant quando punctum A est ad partes rectae DE ad quas est BC , etiam obtinebunt quando A est ad alteras partes ipsius DE . Et propterea si Locus construi poterit in casu quinto vel sexto in prima hypothese scilicet quando A est ad partes rectae DE ad quas est BC , dabitur etiam Locus per eosdem casus, quando A est ad alteras partes ipsius DE .

Similiter vero procedendum si fuerint quatuor aut plures parallelae positione datae, fuerintque rectangula contenta quibusdam ex ductis et datis rectis, aequalia rectangulis contentis reliquis ductis et totidem datis rectis.

LEMMA II.

Si fuerint quotcunque magnitudines quae binae sumptae in eadem sunt ratione, et sint rectangula contenta quibusvis ipsarum terminis antecedentibus et datis rectis, simul aequalia rectangulis contentis reliquis terminis antecedentibus et datis rectis. Erunt rectangula contenta terminis primos antecedentes consequentibus, et primis datis rectis, simul aequalia rectangulis contentis reliquis terminis consequentibus et reliquis rectis datis.

Sint enim in eadem ratione A ad B , C ad D , E ad F &c. sitque rectangulum A, α aequale ipsis C, γ ; E, ϵ simul: erit B, α aequale ipsis D, γ ; F, ϵ .

Est enim per 1. 6. A, α ad B, α ut C, γ ad D, γ ; et ut E, ϵ ad F, ϵ . Quare per 12. 5. est A, α ad B, α ut C, γ et E, ϵ simul ad D, γ et F, ϵ . Et aequale est A, α ipsis C, γ ; E, ϵ , quare B, α aequale est ipsis D, γ ; F, ϵ . Et similiter si plures fuerint magnitudines.

PROP.

reliqua puncta ad partes puncti N. Quintus casus (in quo, ut et in 6^{to}, H est inter M, N puncta) est quando punctum A est extra reliqua puncta ad utrasvis partes. et Sextus quando A est inter puncta reliqua. Quoniam vero horum omnium solutiones et determinationes paululum tantum differunt ab iis quae in casibus primae partis adhibitae fuerunt; satis erit casum primum ostendere. Sit igitur

Cas. 1. Quando punctum A est extra reliqua puncta ad partes puncti H, ordine punctorum existente, ut dictum fuit, A, H, M, N.

A puncto A ad tres positione datas BC, BE, BG, ductae sint in datis angulis AH, AK, AL; sitque rectangulum contentum AH et α aequale ipsis AK, β ; AL, γ ; datis sc. α , β , γ .

Occurrat AH ipsis BE, BG in M, N; et quoniam specie datum est triangulum AKM, dabitur ratio AM ad AK. in hac ratione sit β ad δ , et propter datam β , dabitur recta δ ; et rectangulum AM, δ aequale erit ipsi AK, β . similiter quoniam data ratio AN ad AL, si in hac ratione fiat γ ad ϵ , dabitur ϵ , et rectangulum AN, ϵ aequale erit ipsi AL, γ . Est autem, ex hypothese, rectangulum AH, α aequale ipsis AK, β ; AL, γ . quare idem AH, α aequale erit rectangulis (AM, δ ; AN, ϵ ; simul, hoc est [1. 2.] ipsis) AH, δ ; HM, δ ; AH, ϵ ; HN, ϵ . et ablato communi rectangulo contento AH et ipsis δ , ϵ simul; erit reliquum contentum sc. AH et excessu rectae α supra ipsas δ , ϵ simul, aequale reliquo, rectangulis sc. HM, δ ; HN, ϵ . quoniam vero data est ratio MH ad HB, et ratio HB ad HN; dabitur ratio MH ad HN. et datae sunt δ , ϵ , ideoque et ipsarum ratio; quare [23. 6.] data est ratio rectanguli HM, δ ad ipsum HN, ϵ . et [6. dat.] propterea data est ratio HM, δ simul cum HN, ϵ ad ipsum HM, δ . Ergo data ratio rectanguli contenti AH et excessu rectae α supra ipsas δ , ϵ simul ad rectangulum HM, δ . datae autem sunt α , δ , ϵ rectae, quare [68. dat.] data ratio AH ad MH. et data est HM ad HB; ergo data est ratio AH ad HB; datusque est angulus AHB, quare, juncta BA, triangulum ABH specie dabitur [41. dat.] datus igitur est angulus ABH; data autem est BH positione, punctumque B datum est; positione igitur data est BA [29. dat.]. Tangit propterea punctum A rectam positione datam.

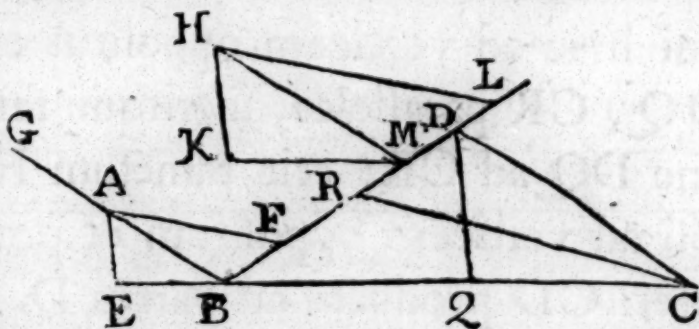
Componetur

niam ex constructione, rectangulum AH , ζ aequale est (ipfi O , P , hoc est) ipsis HM , δ ; HN , ϵ simul; addatur commune contentum sc. AH et ipsis δ , ϵ simul; et rectangulum contentum AH et ipsis δ , ϵ , ζ simul, hoc est rectangulum AH , α aequale erit ipsis AM , δ ; AN , ϵ . Est autem propter aequiangularia triangula, AM ad AK , ut (HN ad HR , hoc est, ex constructione, ut) β ad δ ; quare rectangulum AM , δ aequale est ipfi AK , β . Similiter est AN ad AL , ut (HN ad HS , hoc est ut) γ ad ϵ ; quare rectangulum AN , ϵ aequale est ipfi AL , γ . Ergo rectangulum AH , α aequale est ipsis AK , β ; AL , γ simul. Et quoniam est AH ad ah , ut (BA ad ba , hoc est, ut) AK ad ak , et etiam ut AL ad al ; erit per Lem. 2. rectangulum ah , α aequale ipsis ak , β ; al , γ simul.

Reliqui quinque casus, ut et ii in quibus una vel plures ex rectis ductis parallelae sunt totidem ex rectis positione datis, similiter ostendi poterint.

L E M M A III.

SIT triangulum BCD , et ducta BG parallela lateri opposito CD , ducantur a puncto quovis A in BG ad reliqua latera BC , BD , vel ad ipsa producta, rectae AE , AF ; habebunt hae eandem inter se rationem quam habent DQ , CR quae ad eadem latera ab angulis trianguli



ipsis oppositis, parallelae ducuntur ipsis AE , AF . idemque eveniet si vice rectarum BC , BG sumantur duae MK , MH quae per punctum quodvis M in recta BD parallelae ducuntur ipsis BC , BG , sc. ductis HK , HL ad MK , BD ipsis DQ , CR parallelis, erit HK ad HL , ut DQ ad CR .

M

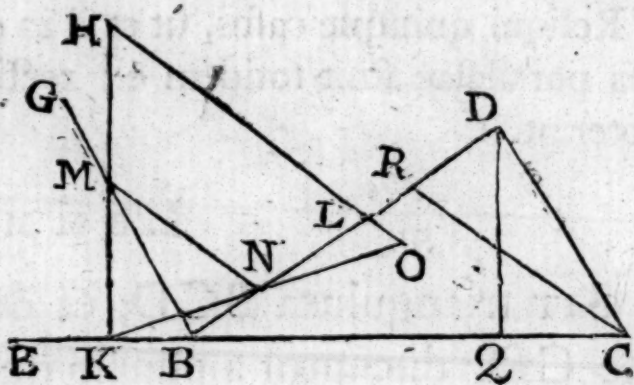
Est

Est enim, propter aequiangularia triangula AEB, DQC; AE ad AB, ut DQ ad DC; ut vero AB ad AF, ita est DC ad CR propter aequiangularia triangula ABF, CDR; ergo ex aequo est AE ad AF, ut DQ ad CR. et similiter omnino ostendetur HK ad HL, ut DQ ad CR.

LEMMA IV.

IISDEM manentibus, sc. sit BG parallela lateri trianguli opposito DC, et producat CB ad E; si a puncto H intra angulum GBD ducantur ad CB, BD rectae HK, HL ipfis DQ, CR parallelae, erit ratio HK ad HL major ratione

DQ ad CR. Si vero punctum H fuerit intra angulum GBE, reliquis manentibus; erit ratio HK ad HL minor ratione DQ ad CR. Et contra, si a puncto H intra angulum trianguli exteriorum vel intra eum



qui huic ad verticem oppositus est ducantur HK, HL ipfis DQ, CR parallelae, fueritque ratio HK ad HL major ratione DQ ad CR; erit punctum H intra angulum GBD vel ipsi ad verticem oppositum et propterea juncta BH occurret lateri CD producto ad partes D. Et si ratio HK ad HL minor fuerit ratione DQ ad CR, punctum H erit intra angulum GBE, vel ei ad verticem oppositum, junctaque BH occurret ipsi CD producto ad partes C. Si autem ratio HK ad HL eadem fuerit rationi DQ ad CR, erit juncta BH parallela ipsi CD.

Primo

Primo sit punctum H intra angulum GBD vel intra oppositum ei ad verticem, et occurrat HK rectae BG in M puncto, a quo ad BD ducatur MN parallela ipsi HL , et juncta KN occurrat HL in O . Est igitur ratio HK ad HL major ratione HK ad HO , hoc est ratione KM ad MN , hoc est ratione DQ ad CR .

Et si punctum H fuerit intra angulum GBE similiter omnino ostendetur ratio HK ad HL minor ratione DQ ad CR .

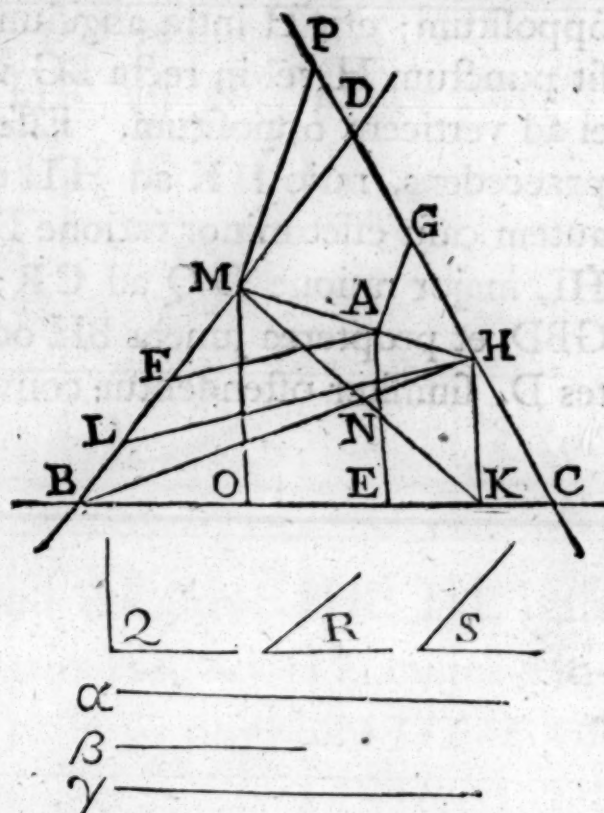
Et contra, si ratio HK ad HL major fuerit ratione DQ ad CR , existente puncto H intra exteriorem trianguli angulum vel ei ad verticem oppositum; erit H intra angulum GBD . non enim, sed si fieri potest sit punctum H vel in recta BG vel intra reliquum angulum GBE , vel ei ad verticem oppositum. Esset igitur in primo casu, per Lemma praecedens, ratio HK ad HL eadem rationi DQ ad CR , in altero autem casu esset minor ratione DQ ad CR . Est autem ratio HK ad HL major ratione DQ ad CR ; ergo punctum H est intra angulum GBD , et propterea juncta BH occurret lateri CD producto versus partes D . similiter ostendentur conversae reliquae.

QUANDO positione datae sunt tres rectae non omnes inter se parallelae neque per idem punctum transeuntes, caeteris ut in Propositione 26. manentibus.

A puncto A ad tres positione datas BC, BD, CD, ductae sint tres rectae AE, AF, AG in angulis AEB, AFD, AGC qui datis angulis ad Q, R, S aequales sunt. Sitque rectangulum contentum AE et data recta α , aequale contento AF et data recta β , una cum contento AG et data recta γ . Tanget punctum A rectam positione datam.

Cas. 1. Quando punctum A est intra triangulum BCD rectis positione datis comprehensum.

Manifestum est si locus punctorum A, cujuscunque generis fuerit, occurrat rectae CD in puncto quodam H, et ducantur ad BC, BD rectae HK, HL ipsis AE, AF parallelae, fore rectangulum HK, α aequale ipsi HL, β ; nam quoniam punctum H est in ipsa CD, nulla poterit ab eo recta duci ad CD: Et contra, si fuerit punctum H in recta CD quod faciat rectangulum HK, α aequale ipsi HL, β , seu, quod idem est, quod faciat HK ad HL in data ratione quam habet β ad α , fore punctum illud H in loco quaesito. Semper autem poterit punctum H, quod hoc efficiet inveniri in recta CD; nam, per corollarium Prop. 23. recta quae locus est punctorum intra angulum CBD, a quorum quovis si ducantur ad BC, BD duae rectae in datis angulis Q, R, ductae inter



inter se habebunt rationem datam β ad α , transit per punctum B, adeoque necessario occurrat ipsi CD. Sit haec recta BH occurratque CD in H; datum igitur est punctum H; et ductis ad BC, BD rectis HK, HL parallelis ipsis AE, AF; erit HK, ad HL ut β ad α , et rectangulum HK, α aequale erit ipsi HL, β . Jungatur AH, occurratque ipsi BD in M; juncta autem KM occurrat AE in N; et ad BC, CD ducantur MO, MP ipsis AE, AG parallelae. Est igitur, propter parallelas, AN ad HK, ut (AM ad MH, hoc est ut) AF ad HL; quare et rectangulum AN, α est ad HK, α ; ut AF, β ad HL, β . Et ostensum est HK, α aequale ipsi HL, β ; ergo et AN, α aequale est rectangulo AF, β . Est autem, ex hypothesi, rectangulum AE, α aequale ipsis AF, β ; AG, γ simul; ergo reliquum NE, α reliquo AG, γ est aequale. Et propter parallelas est NE ad MO, ut (NK ad MK, hoc est ut AH ad MH, hoc est ut) AG ad MP. quare est rectangulum NE, α ad MO, α ut AG, γ ad ipsum MP, γ ; aequalia autem ostensa sunt NE, α ; AG, γ ; aequalia igitur sunt MO, α ; MP, γ . et propterea est MO ad MP, ut γ ad α , hoc est in ratione data. Quoniam igitur a puncto M ad duas positione datas BC, CD inter se convenientes ductae sunt MO, MP in datis angulis, datamque habentes rationem; tanget punctum M rectam positione datam per Prop. 23. hujus; idem vero tangit rectam BD positione datam; quare datum est punctum M; et datum ostensum est H; ergo recta HM positione data est; et propterea tangit punctum A rectam positione datam.

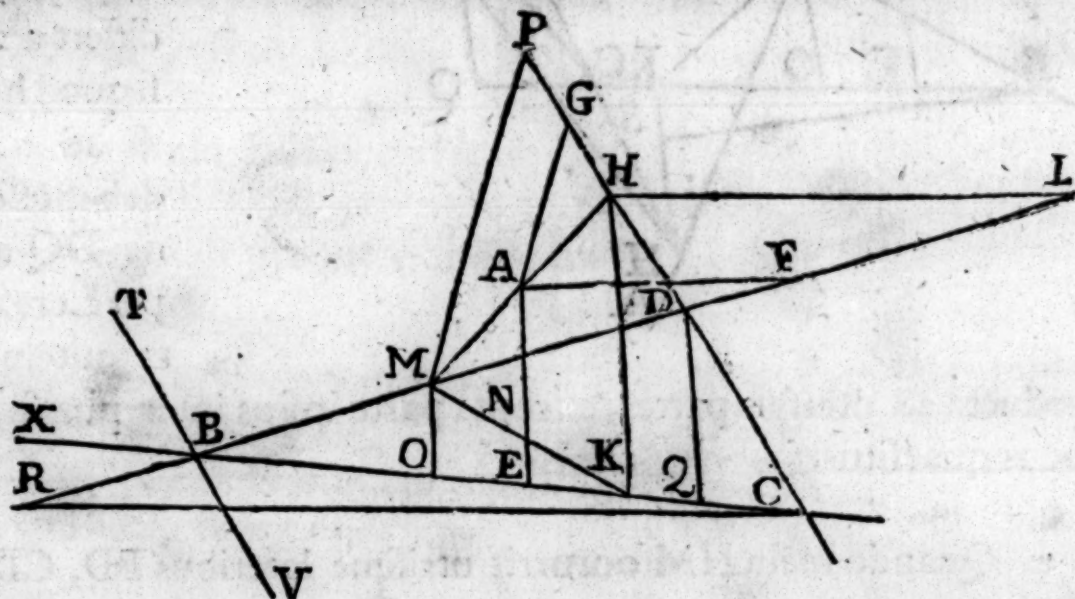
Componetur vero ita.

Inveniatur ope Prop. 23. recta BH intra angulum CBD, quae Locus est punctorum a quorum quovis H ductae ad BC, BD duae rectae HK, HL in angulis ipsis Q, R, aequalibus, rationem habeant eandem quam habet β ad α ; hoc est quae faciant rectangulum HK, α aequale ipsi HL, β . Et occurrat BH ipsi CD in H. Similiter, intra angulum BCD inveniatur recta CM a cujus quovis puncto M ductae ad BC, CD duae rectae MO, MP in angulis ipsis Q, S aequalibus faciant rectangulum MO, α aequale ipsi MP, γ . occurratque CM ipsi BD in M: jun-

Hic autem casus primus in quo sc. puncta H, M sunt in ipsis trianguli lateribus CD, BD nullam habet determinationem.

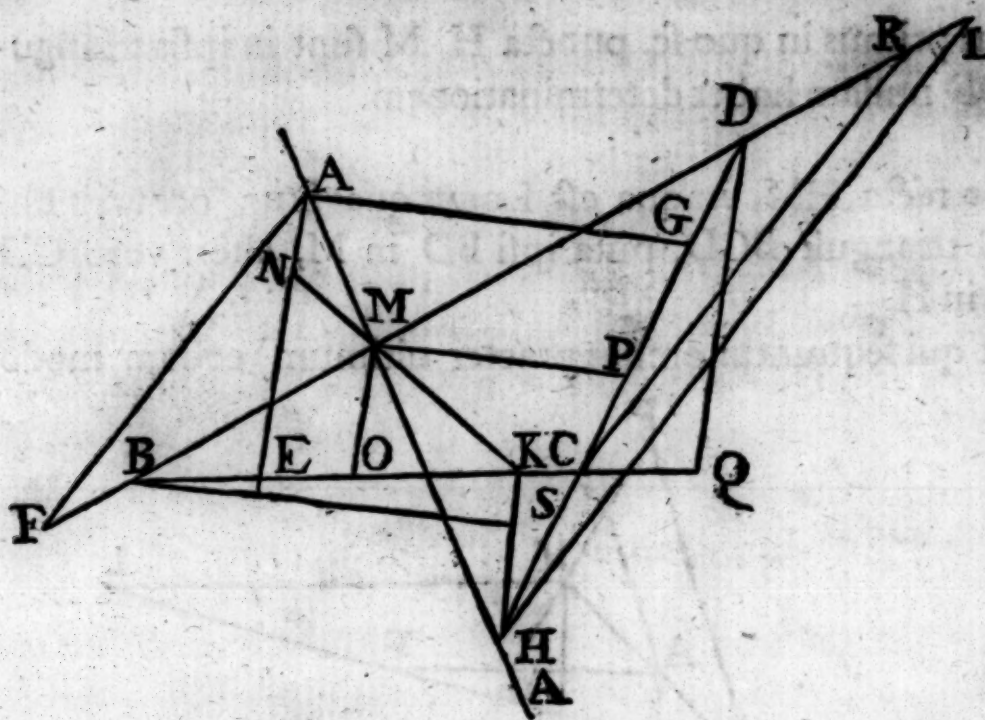
Cas. 2. Quando recta HM, in qua est Locus quaesitus, occurrit uni laterum BD, DC trianguli BCD, puta ipsi BD in M, alteri vero CD producto ultra D in H.

Casus hic (ut et qui sequuntur omnes praeter ultimum) eodem modo



ostenditur quo primus. quoniam vero requiritur ut punctum H sit in CD producta ultra D; si per B ducatur recta TBV parallela ipsi CD, erit H intra angulum TBD; ductisque HK, HL in datis angulis ad BC, BD; ad easdem ducantur DQ, CR ipsis HK, HL parallelae, et per Lem. 4. erit ratio HK ad HL major ratione DQ ad CR; est autem HK ad HL, ut β ad α , ut in praecedente dictum fuit; quare ratio β ad α major est ratione DQ ad CR; quae est determinatio hujus casus. Si igitur sit ratio β ad α major ratione DQ ad CR, et inveniatur intra angulum XBD, qui deinceps est ipsi CBD, recta BH, a cujus quovis puncto ductae ad BC, BD rectae, ipsis DQ, CR, parallelae, eandem habent rationem quam β ad α ; necessario occurret recta haec ipsi CD productae ultra D, per Lem. 4. Occurrat ei in H, et inventa recta CM prorsus ut in praecedente, juncta HM erit Locus quaesitus; quod omnino ut in praecedente ostenditur. ut et quid eveniet si sumatur punctum A in recta HM ad utramvis partem producta.

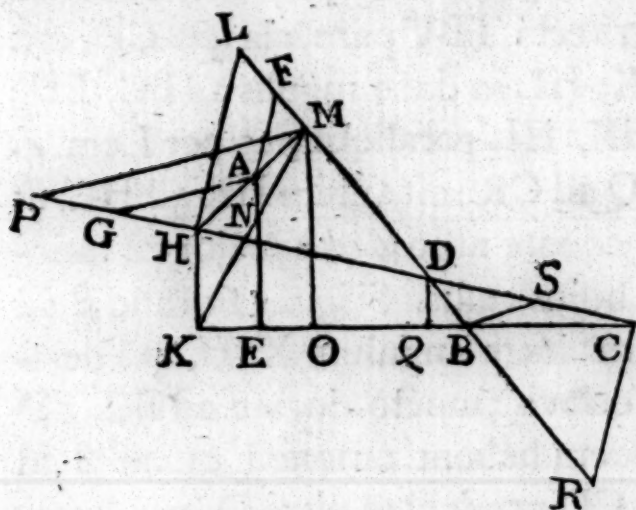
Cas.



Cas. 3. Quando recta HM occurrit uni lateri BD in M, alteri vero CD producta ultra C in H, nihil differt a 2^{do}, nisi quod hic ratio β ad α minor debet esse ratione DQ ad CR per Lem. 4. Totam autem rectam

HM productam ad utraque partes, excepta parte ipsius inter puncta H, M, erit Locus quaesitus.

Cas. 4. Quando recta HM occurrit utrisque lateribus BD, CD ultra D productis.

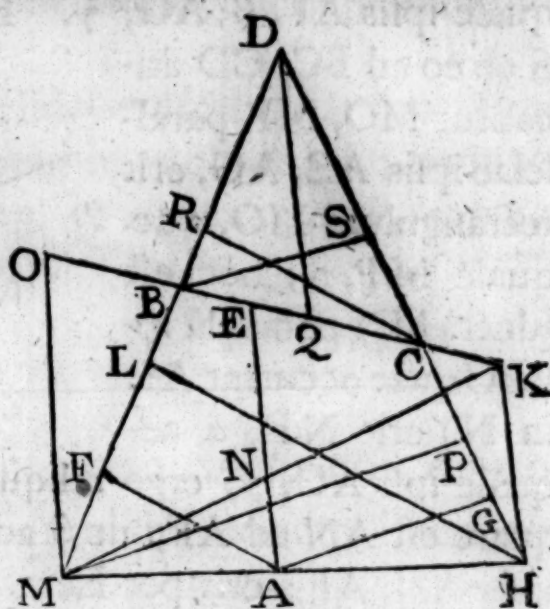


Hic quoniam punctum H requiritur esse in CD producta ultra D, debet ratio β ad α major esse ratione DQ ad CR, ut in casu secundo ostensum fuit. Et ad CD ducta BS ipsi MP seu AG parallelâ, similiter per Lem. 4. ostenditur rationem γ ad α majorem debere esse ratione DQ ad BS. Et si obtineant hae duae conditiones, et ducatur recta BH ut in casu se-

cundo, et eodem modo ducatur CM intra angulum qui deinceps est ipsi BCD; erunt H, M, puncta in lateribus CD, BD productis ultra D; junctaque HM erit Locus quaesitus.

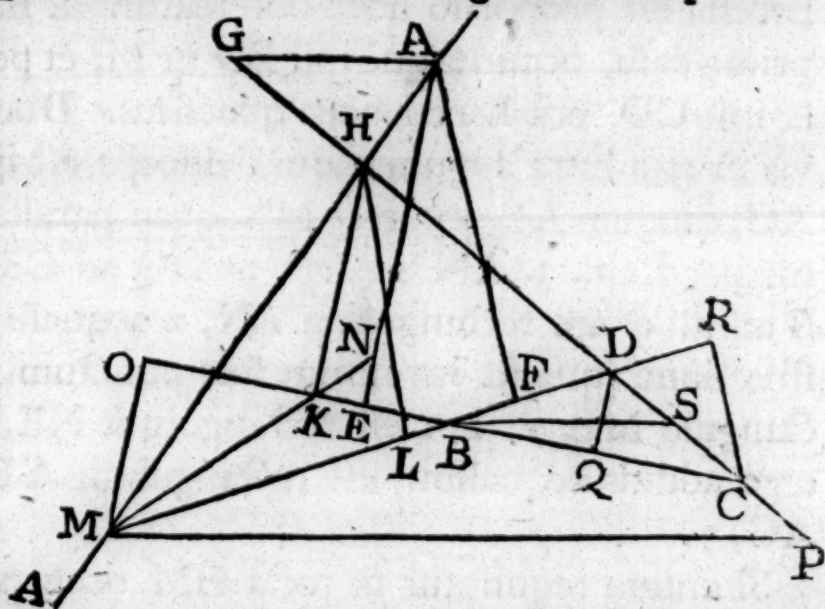
Cas.

Cas. 5. Quando recta HM occurrit utrisque lateribus CD, BD ultra basim BC productis, nihil differt a 4^{to}, nisi quod ratio β ad α minor debet esse ratione DQ ad CR, et ratio γ ad α minor ratione DQ ad BS. Ductisque BH, CM, intra angulos qui deinceps sunt ipsis CBD, BCD, erit juncta HM Locus quaesitus.



Cas. 6. Quando HM occurrit uni laterum, puta ipsi CD, producto ultra D; alteri vero DB producto ultra basim BC.

In hoc casu, quoniam punctum H est intra angulum comprehensum latere DB et recta quae per B parallela ducta est ipsi CD, debet ratio β ad α major esse ratione DQ ad CR. et quoniam punctum M est intra angulum contentum basi BC et recta quae per C parallela ducta est ipsi BD, debet ratio γ ad α minor esse ratione DQ ad BS, ut constat ex Lem. 4.



ductisque BH, CM intra angulos qui deinceps sunt ipsis CBD, BCD, junctaque HM et producta ad utrasque partes; erit tota HM, excepta parte ipsius inter puncta H, M, Locus quaesitus.

Cas. 7. Quando recta HM, in qua sc. est Locus, parallela est uni laterum BD, CD, puta ipsi CD. poterit autem HM occurrere vel reliquo lateri BD, vel ipsi ad utramvis partem producto.

Primo occurrat HM ipsi BD in M, ductisque AE, AF, AG in datis

N

tis

erit ea pars rectae HM quae est intra angulum comprehensum recta BC, et recta BD producta ultra BC. caetera omnino ut in prima parte hujus cas. 7.

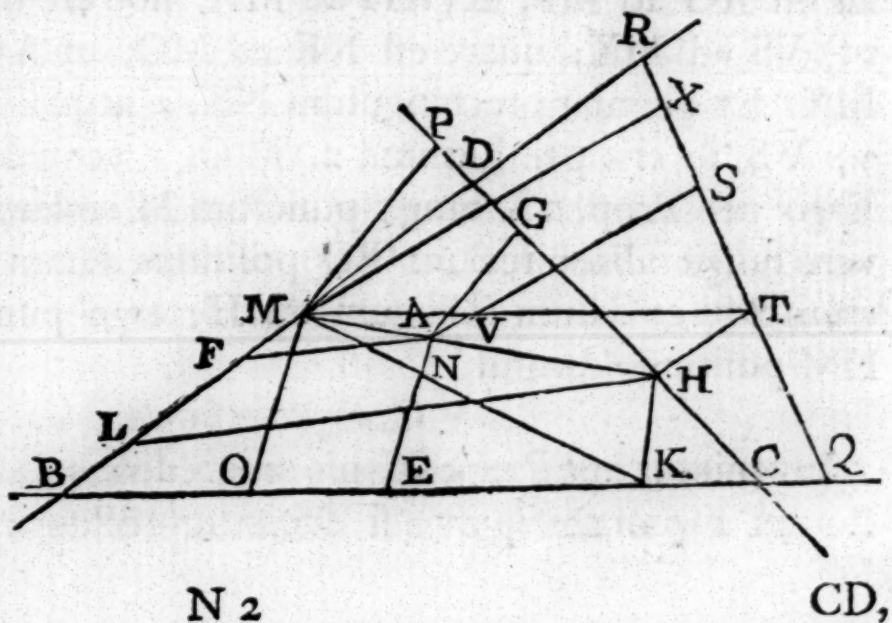
Casus autem in quo duae ex tribus positione datis rectis sunt inter se parallelae similiter ostenduntur; et Locus in quolibet ipsorum invenietur ut in praemissis, ope sc. Prop. 23. et nonnunquam Prop 22. hujus.

PROP. XXIX.

Si sint quatuor rectae lineae positione datae non omnes inter se parallelae, et ad ipsas a quodam puncto ducantur rectae lineae in datis angulis; sit vero rectangulum contentum data recta et una ex ductis aequale rectangulis contentis reliquis ductis et totidem datis rectis; vel sint rectangula contenta duabus ex ductis et datis rectis, simul aequalia rectangulis contentis reliquis ductis et datis rectis: Tanget, in utroque casu, punctum rectam positione datam.

A puncto A ductae sint ad quatuor rectas positione datas BC, BD, CD, QR rectae AE, AF, AG, AS in datis angulis AEB, AFD, AGC, ASR; sitque primo rectangulum contentum AE et data recta α aequale rectangulis AF, β ; AG, γ ; AS, δ ; datis sc. rectis β , γ , δ : tanget punctum A rectam positione datam.

Sit H punctum in quo Locus punctorum A occurrit rectae



BC, BD, QR, rectangulum contentum ductâ ad BC et data rectâ α aequale sit contento ductâ ad BD et datâ β , una cum contento ductâ ad QR et datâ δ . Occurrat recta inventa ipsi CD in puncto H et ducantur ad praedictas rectas in datis angulis HK, HL, HT. Est igitur rectangulum HK, α aequale ipsis HL, β ; HT, δ . Similiter inveniatur in recta BD punctum M, a quo ductae in datis angulis ad ipsas BC, CD, QR rectae MO, MP, MX faciant rectangulum MO, α aequale ipsis MP, γ ; MX, δ ; erit juncta HM Locus quaesitus; hoc est si a quovis in ipsa puncto A ducantur ad BC, BD, CD, QR quatuor rectae AE, AF, AG, AS in datis angulis rectangulum AE, α aequale erit rectangulis AF, β ; AG, γ ; AS, δ . Junctae enim MK, MT occurrant ipsis AE, AS in N, V punctis; et quoniam in eadem ratione sunt HK ad AN, HL ad AF et HT ad AV; et ex constructione, est rectangulum HK, α aequale ipsis HL, β ; HT, δ ; erit per Lem. 2. rectangulum AN, α aequale ipsis AF, β ; AV, δ . Et quoniam in eadem ratione sunt NE ad MO, AG ad MP, et VS ad MX, ut prius ostensum; et, ex constructione, est MO, α aequale ipsis MP, β ; MX, δ ; erit per Lem. 2. rectangulum NE, α aequale AG, γ ; VS, δ . Et fuit AN, α aequale ipsis AF, β ; AV, δ . Ergo, additis aequalibus, erit AE, α aequale ipsis AF, β ; AG, γ ; AS, δ .

2^{do}. Sit jam rectangulum AE, α una cum AF, β aequale ipsis AG, γ ; AS, δ , reliquis ut in praecedente manentibus; tanget punctum A rectam positione datam.

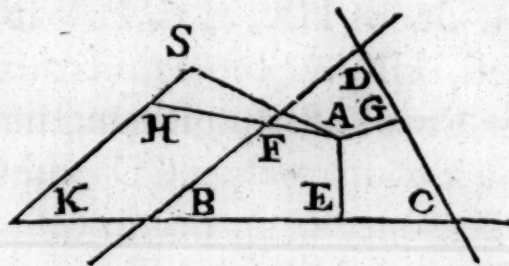
Sit H punctum in quo Locus occurrit rectae CD, et ad BC, BD, QR ductis HK, HL, HT ipsis AE, AF, AS, parallelis, erit ex hypothesi, HK, α rectangulum una cum HL, β aequale ipsi HT, δ ; quare per Prop. 28. tangit punctum H rectam positione datam, idem autem tangit aliam rectam CD positione datam; datum igitur est punctum H. Iisdemque, ut in primo casu, constructis erit HK ad AN, ut HL ad AF, et ut HT ad AV; et quoniam rectangula HK, α ; HL, β simul aequalia sunt ipsi HT, δ ; per Lem. 3. erunt et AN, α ; AF, β simul aequalia ipsi AV, δ . sunt autem ex hypothesi AE, α ; AF, β simul aequalia ipsis AG, γ ; AS, δ ; ergo reliquum NE, α aequale est reliquo sc. ipsis AG, γ .

AG, γ ; VS, δ . Et quoniam, ut in praecedente ostensum, in eadem ratione sunt NE ad MO, AG ad MP, VS ad MX; erit per Lem. 3. MO, α aequale ipsis MP, γ ; MX, δ . Ergo datum est punctum M; et datum ostensum est H; quare punctum A tangit rectam positione datam.

Componetur vero ita.

Inveniatur per Prop. 28. punctum H in recta CD quod faciat rectangulum HK, α una cum HL, β aequale ipsi HT, δ . Similiter in recta BD inveniatur punctum M quod faciat MO, α rectangulum aequale ipsis MP, γ ; MX, δ . Erit juncta HM Locus quaesitus; hoc est, si ducantur AE, AF, AG, AS ut dictum est, erunt rectangula AE, α ; AF, β simul aequalia ipsis AG, γ ; AS, δ . Iisdem enim ut in praecedente constructis, quoniam in eadem ratione sunt HK ad AN, HL ad AF, HT ad AV; et ex constructione rectangulum HK, α una cum HL, β aequale est ipsi HT, δ , erunt et AN, α ; AF, β simul aequalia ipsi AV, δ per Lem. 3. Et quoniam in eadem ratione sunt NE ad MO, AG ad MP, VS ad MX; et est MO, α rectangulum aequale ipsis MP, γ ; MX, δ ; erit per Lem. 3. NE, α aequale ipsis AG, γ ; VS, δ . Ergo, additis aequalibus, erunt rectangula AE, α ; AF, β simul aequalia ipsis AG, γ ; AS, δ .

COR. I. Et si rectangula contenta una ex ductis, vel quibusdam ex ductis et datis rectis non aequalia fuerint rectangulis contentis reliquis ductis et datis rectis, verum ad ipsa simul sumpta datam habuerint rationem; tanget, et in hac hypothese, punctum a quo rectae ducuntur, rectam positione datam.
Ex. gr. in casu quatuor rectarum.



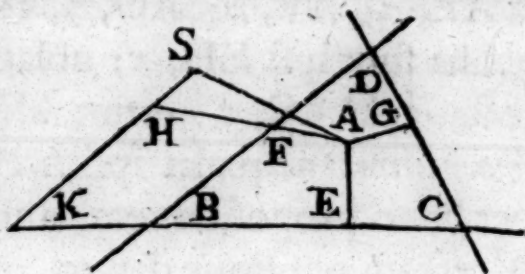
Sit rectangulum AE, α una cum AF, β ad AG, γ una cum AS, δ in data ratione; in hac ratione sit ϵ ad γ , et ζ ad δ ; et in eadem erit rectangulum AG, ϵ ad AG, γ ; et AS, ζ ad ipsum AS, δ ; et per 12. 5. in eadem ratione erit AG, ϵ simul cum AS, ζ ad

α aequale ipsis $AF, \beta; AG, \gamma, \&c.$ addito communi AE, α ; erunt $AE, \alpha; AF, \beta; AG, \gamma, \&c.$ simul aequalia ipsi EH, α hoc est spatium dato.

Si fuerint $\alpha, \beta, \gamma, \&c.$ inter se aequales, erunt $AE, AF, AG, \&c.$ simul aequales rectae EH magnitudine datae. unde in hoc casu Corollarium vertitur in hunc Locum sc. si a puncto A ad positione datas $BC, BD, CD, \&c.$ ducantur rectae $AE, AF, AG, \&c.$ in datis angulis, fuerintque ductae, omnes simul, aequales datae rectae EH ; tanget punctum A rectam positione datam. Et similiter quum fuerint tres vel duae rectae positione datae.

COR. III. Et si quaedam ex rectangulis simul sumpta majora sint reliquis simul sumptis spatium dato, tanget adhuc punctum a quo rectae ducuntur rectam positione datam.

Sint rectangula $AE, \alpha, \&c.$ aequalia ipsis $AF, \beta; AG, \gamma, \&c.$ simul cum spatium dato; et producta AF , in ipsa sumatur FH quod faciat rectangulum FH, β aequale spatium dato, quare punctum H tanget rectam positione datam, ut in Cor. 2. ostensum. Et quoniam ex hypothese rectangula $AE, \alpha, \&c.$ aequalia sunt ipsis $AF, \beta; AG, \gamma; \&c.$ una cum FH, β ; hoc est ipsis $AH, \beta; AG, \gamma, \&c.$ tanget punctum A rectam positione datam, per hanc Propositionem; eademque est Compositio, inventa sc. recta KH ut in praecedente corollario.



COR. IV. Denique, si quaedam ex rectangulis simul sumpta majora vel minora sint reliquis simul sumptis dato, quam in ratione; vel si quaedam ex iis una cum eo ad quod reliqua simul sumpta datam habent rationem, data simul fuerint; tanget punctum a quo rectae ducuntur rectam positione datam.

Sit rectangulum AE, α una cum AF, β majus rectangulo AG, γ una cum AS, δ dato, quam in ratione; sitque datum spatium Z ; abla-

to

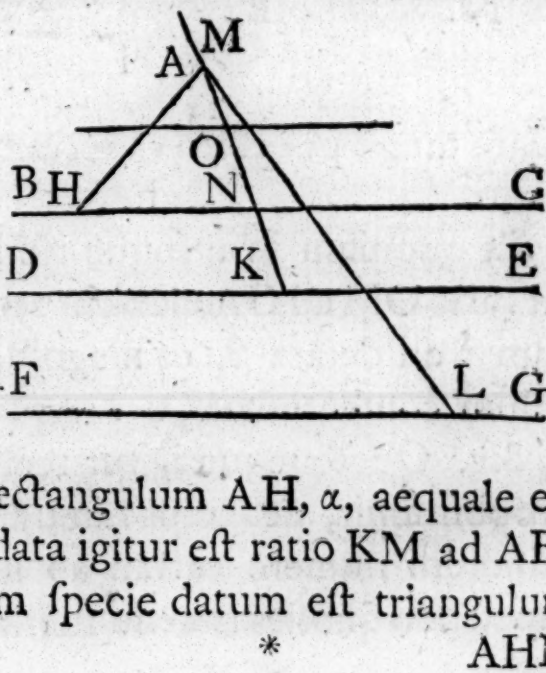
to igitur spatio Z, erit excessus AE, α una cum AF, β supra Z ad AG, γ una cum AS, δ in ratione data. In hac sit ϵ ad γ , et ζ ad δ . Et ut in cor. 1. ostendetur excessus ipsorum AE, α , AF, β supra Z aequalis rectangulis AG, ϵ ; AS, ζ ; simul. Et propterea per Cor. 3. tangit punctum A rectam positione datam. Similiter ostendetur Casus 2^{us} et 3^{tus} qui quidem ope Coroll. 2^{di} perficietur.

Eodem prorsus modo si fuerint quinque rectae positione datae, Locus in hac propositione (ut et Loci in Corollariis ejusdem) invenietur et Compositio fiet ope Loci ad quatuor rectas, five unum rectangulum aequale fuerit reliquis, five duo aequalia fuerint tribus. et similiter Locus ad sex rectas invenietur ope Loci ad quinque, et ita deinceps quotcunque fuerint rectae.

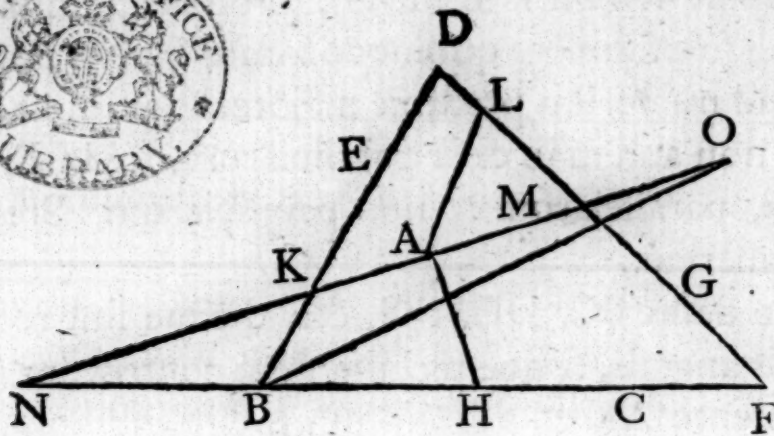
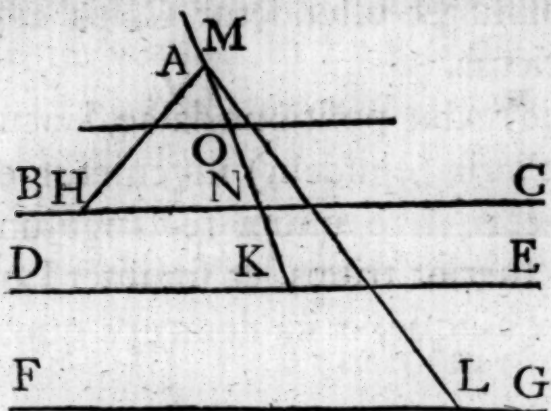
Quoniam vero Propositiones hae, ipsisque similes, in quibus sc. numerus rectarum datarum poterit sine fine augeri, prolixae admodum evadunt; praestat in hoc casu ostendere quomodo a dato quovis numero rectarum progrediatur ad numerum proxime majorem; ut in hac et praecedente factum fuit; non autem in casu parallelarum, sc. in Prop. 26^{ca}. Utrique autem casui, parallelarum et non parallelarum, Propositio quae sequitur aequae inserviet.

A puncto A ad positione datas BC, DE, FG, &c. ductae sint rectae AH, AK, AL, &c. in datis angulis, sitque rectangulum contentum AH et data recta α aequale contento AK et data recta β , una cum contento AL et data recta γ &c. tanget punctum A rectam positione datam.

Producatur enim KA ad M ita ut rectangulum KM, β aequale sit ipsi AH, α , hoc est ipsis AK, β ; AL, γ , &c. et ablato communi rectangulo AK, β , erit reliquum AM, β , aequale reliquo, rectangulis sc. AL, γ , &c. Et quoniam rectangulum AH, α , aequale est ipsi KM, β , erit α ad β , ut KM ad AH; data igitur est ratio KM ad AH. Occurrat AM ipsi BC in N, et quoniam specie datum est triangulum



AHN, dabitur ratio AH ad AN; data igitur erit [8. dat.] ratio KM ad AN. Sit ut KM ad NA, ita OM ad OA, et ita [per 19. 5. aut 12. 5.] erit KO ad ON; igitur data est ratio KO ad ON, et propterea data est ratio KN ad NO. Si igitur BC, DE inter se parallelae fuerint, quoni-



am inter ipsas ducta est NK in angulo dato, erit NK magnitudine data [32. dat.], quare magnitudine dabitur NO ad quam NK datam habet rationem, et data est recta BC positione, datusque est angulus BNO; ergo tangit punctum O rectam positione datam ipsi BC parallelam [20 hujus.]. Si autem BC, DE inter se non fuerint parallelae, occurrant

sibi mutuo in B, et quoniam specie datum est triangulum NBK, dabitur ratio KN ad NB, et data ostensa est ratio KN ad NO, ergo [8. dat.] data erit ratio BN ad NO, data autem est BN positione, et punctum B, angulusque BNO datus est,

quare tangit punctum O rectam positione datam per casum 1. Prop. 23. hujus.

Et quoniam in utroque casu data ostensa est ratio KM ad NA, hoc est ratio OM ad OA, dabitur ratio MA ad AO; in hac ratione fiat quaedam δ ad datam β , et magnitudine dabitur recta δ . erit autem rectangulum contentum AO, δ aequale ipsi MA, β , hoc est rectangulis AL, γ , &c. Quotcunque igitur rectae positione datae fuerint in hypothese propositionis, deductus nunc erit Locus ad numerum rectarum unitate minorem numero earum ab initio propositarum, et similem analysin repetendo quoties necesse fuerit, deducetur ad casum in quo duae tan-

tum

tum rectae positione datae erunt; et propterea deductus erit ad Propositionem 22^{dam}, aut 23^{tiam}, prout hae duae rectae parallelae fuerint, aut inter se convenerint. Quoniam igitur Propositio in casu duarum rectarum soluta habetur in Prop. 22^{da}. aut 23^{tia}. hujus, solvetur per praecedentem in casu trium rectarum, et ope solutionis in hoc casu, solvetur in casu quatuor rectarum, et ita deinceps.

Clarissimus Fermatius Locum hunc in eo casu trium rectarum quo duae ex rectis datis, quas β et γ nominavimus, sunt inter se aequales, demonstratione satis perplexa ostendit, quaeque magis perplexa foret si ad casum in quo nullae ex tribus rectis datis sunt inter se aequales, multo magis si ad casum in quo plures quam tres rectae datae sunt, quispiam eam extendere velit. Calculus autem Algebraicus quem ad Locum hunc inveniendum tradit Schootenius nullius unquam usus, in solutione cujuspiam problematis ope hujus Loci, futurus est.

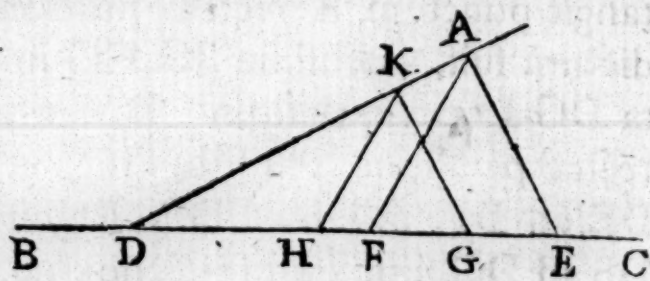
PROP. XXX.

Si a puncto ad rectam positione datam ducantur duae rectae in datis angulis, abscindantque ex positione data segmenta dato puncto, vel duobus datis punctis adjacentia, quae datam inter se habent rationem; tanget punctum rectam positione datam.

CAS. I. Quando datum est unum punctum.

A puncto A ad rectam positione datam BC in qua datum est punctum D, ductae sint AE, AF, in datis angulis AED, AFD, et data sit ratio DE ad DF; tanget A rectam positione datam.

Quoniam enim data est ratio DE ad DF, dabitur et ratio DE ad EF [5. dat.]; et, propter specie datum [40. dat.] triangulum EAF,



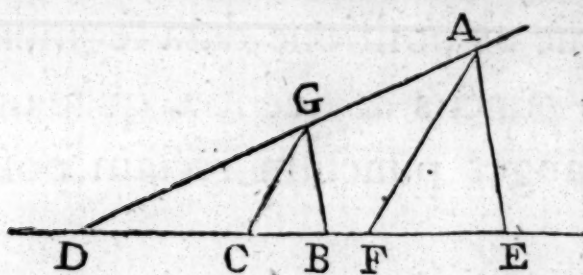
data est ratio EF ad EA; quare [8. dat.] data est ratio DE ad EA, et datus est angulus DEA, ideoque, junctâ DA, triangulum DEA specie datum est [41. dat.], et datum est D punctum, ergo DA positione data est [29. dat.].

Componetur ita.

Sumantur quaevis puncta G, H quae faciant rationem DG ad DH eandem rationi datae, et ab ipsis ducantur GK, HK in datis angulis; junctâ et productâ DK erit Locus quaesitus. A quovis enim in ipsa puncto A, ducantur ad BC rectae AE, AF parallelae ipsis KG, KH; erit igitur DE ad DG, ut (DA ad DK, hoc est ut) DF ad DH; et permutando est DE ad DF, ut DG ad DH, hoc est in ratione data. Compositio autem haec paulo brevior est eâ quae fieret stricte sequendo analysin, solet autem hoc evenire quando recta quaedam ad compositionem, non vero ad analysin adhiberi potest, qualis hic est recta DK.

CAS. 2. Quando data sunt duo puncta.

Sint puncta B, C data, et ductis a puncto A ad rectam BC, rectis AE, AF in datis angulis, data sit ratio BE ad CF. Quoniam igitur



data sunt puncta B, C, et in recta BC sumpta sunt puncta E, F quae faciunt rationem BE ad CF datam, dabitur aliud punctum D, quod faciet rationem DE ad DF datam; sc. si fiat DB ad DC in data ratione BE ad CF,

nam per 12. aut 19. 5. erit DE ad DF in eadem data ratione. propter datam autem BC dabitur punctum D; quare, per praecedentem casum, tangit punctum A rectam positione datam. et invento puncto D, ut dictum fuit, ductisque BG, CG in datis angulis, erit junctâ et productâ DG Locus quaesitus. Ducantur enim a quovis in ipsa puncto A rectae parallelae ipsis GB, GC; et, ut in praecedente, ostendetur esse DE ad DF, ut DB ad DC. Ergo per 19. aut 12. 5. erit BE ad CF, ut DB ad DC, hoc est in ratione data.

PROP.

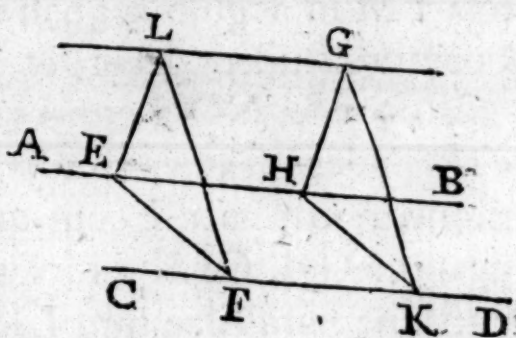
PROP. XXXI.

Si a puncto ad duas positione datas rectas, ducantur duae rectae in datis angulis, abscindantque ex positione datis, segmenta datis punctis adjacentia, quae datam inter se habent rationem: tanget punctum rectam positione datam.

CAS. I. Quando rectae positione datae sunt inter se parallelae.

Sint AB, CD, positione datae, et inter se parallelae, et in ipsis datae sint puncta E, F; a puncto vero G ductae sint ad ipsas rectas GH, GK in datis angulis GHB, GKD abscindantque segmenta EH, FK datam rationem habentia: tanget punctum G rectam positione datam.

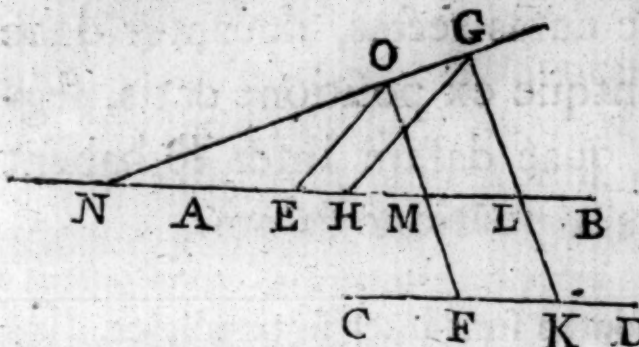
1^{mo} Sit ratio data aequalis ad aequale; et jungantur EF, HK. Quoniam igitur data sunt E, F puncta, positione et magnitudine dabitur EF. aequales autem et parallelae, ex hypothesis, sunt EH, FK; quare et EF, HK; magnitudine igitur data est HK. Angulus autem KHB aequalis est dato FEB, et ex hypothesis datus est BHG, quare datus est angulus KHG. similiter datus erit HKG; quare specie datum erit triangulum GHK; et magnitudine data est KH, quare et HG. Quoniam igitur a puncto G, ad positione datam AB, ducta est GH magnitudine data, in angulo dato GHB; tanget punctum G rectam positione datam, et ipsi AB parallelam, per Prop. 20. huj.



Componetur vero ita.

Juncta EF, ducantur EL, FL in datis angulis, occurrantque sibi mutuo in L; per L ducatur LG ipsis AB, CD parallela; erit haec Locus quaesitus. a quovis enim in ipsa puncto G ducantur ad AB, CD rectae GH, GK parallelae ipsis LE, LF; et quoniam parallelogramma sunt ELGH, GKFL, erit EH aequalis LG, hoc est ipsi FK.

2^{do} Non autem sit data ratio aequalis ad aequale, reliquis ut in praecedente manentibus. Occurrat GK ipsi AB in L, et ducatur AB ad FM, parallela ipsi GK. Quoniam igitur aequales sunt FK, ML, et ex



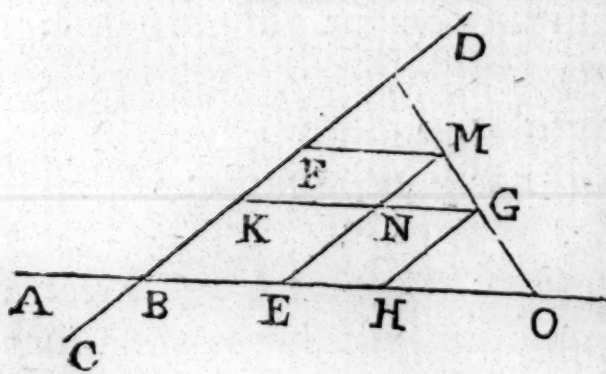
hypothese data est ratio EH ad FK, dabitur ratio ejusdem ad ML; positione autem data est FM quae a dato puncto F, in data positione CD, ducta est in angulo dato [29. dat.]; et positione data est AB, quare datum est punctum M. quoniam igitur data sunt duo puncta E, M in

recta AB, et ad eandem ductae sunt GH, GL in datis angulis, quae abscindunt segmenta EH, ML in data ratione, tangit punctum G rectam positione datam per cas. 2. Propositionis praecedentis.

Componetur vero ita.

A puncto F, in recta CD, ducatur ad alteram positione datam AB, recta FM in angulo aequali ei quem ducenda ad eandem CD cum ipsa comprehendere debet; et, ut ostensum fuit in cas. 2. praecedentis, inveniatur recta NO a cujus quovis puncto ductae ad AB in datis angulis abscindunt segmenta adjacentia punctis E, M, quae datam habent rationem; erit haec Locus quaesitus. A quovis enim puncto in ea G, ducantur GH, GLK ad ipsas AB, CD in datis angulis. Igitur ex constructione parallelae sunt LK, FM, et est EH ad ML in data ratione, est autem ML aequalis FK, quare et EH est in data ratione ad FK.

C A S. II. Quando rectae positione datae sibi mutuo occurrunt.



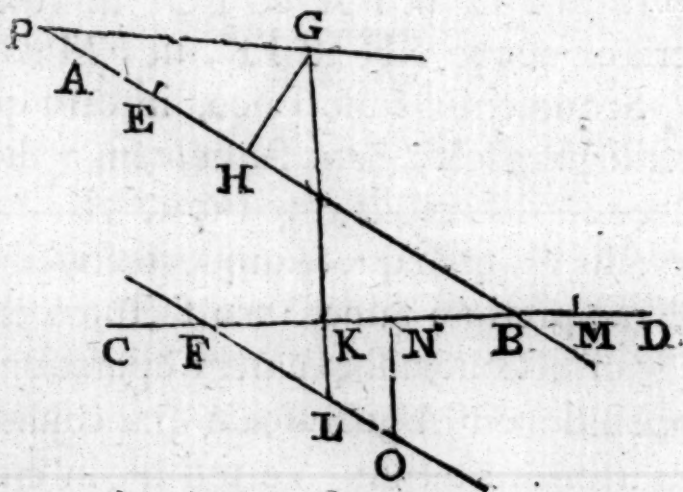
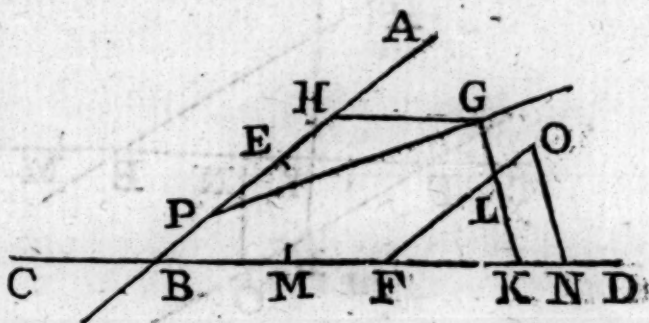
Occurrant positione datae AB, CD sibi mutuo in B; et ad ipsas ductae sint in datis angulis rectae GH, GK, quae 1^{mo} ipsis CD, AB sint parallelae, abscindantque segmenta HE, KF datis punctis E, F adjacentia, quae datam habent rationem. Compleatur autem parallelogrammum EBFM, et occurrat

occurrat GK ipsi EM in N. Quoniam igitur EH, KF aequales sunt ip-
sis GN, NM, dabitur ratio GN ad NM; et datus est angulus MNG,
quare, junctâ MG, triangulum GMN specie datum est [41. dat.],
et datus propterea est, angulus NMG; positione autem data est EM,
et datum est punctum M, ergo recta MG positione data est, [29. dat.].

Compositio manifesta est, completo sc. parallelogrammo BM, fiat OE ad EM in data ratione, et juncta MO erit Locus quaesitus. ductis enim GH, GK, ut dictum fuit, a quovis puncto G in MO; erit GN ad NM, hoc est EH ad FK, ut OE ad EM, hoc est in ratione data.

2^{do} Non sint utraeque ductae parallelae positione datis, reliquis manentibus.

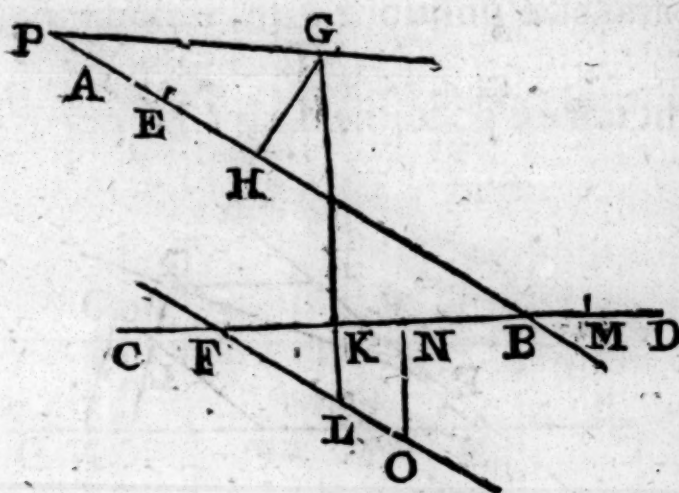
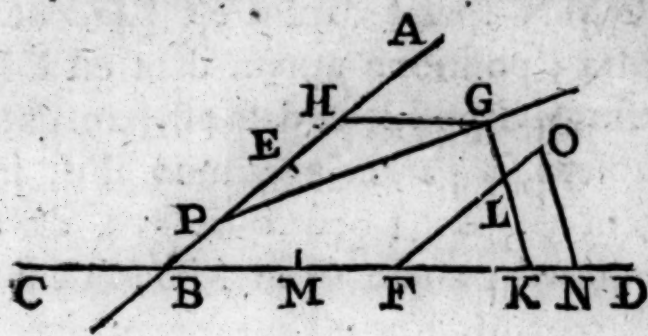
Si una ductarum GH parallela fit uni ex positione datis CD, per datum in hac punctum F ducatur FL alteri positione datae AB parallela; si vero neutra ductarum GH, GK parallela fit uni ex positione datis, ducatur per datum punctum F in alterutra ipsarum CD, recta FL alteri AB parallela; accuratque ei GK quae ad CD ducta est, in L. positione igitur data est FL [28. dat.]; et quoniam in triangulo FKL dantur anguli KFL, FKL, dabitur ratio KF ad FL, et data ex hypothesi est ratio EH ad FK, ergo [8. dat.] data est ratio EH ad FL. Quoniam igitur ad duas parallelas AB, FL positione datas ductae sunt GH, GL in datis angulis, abscindentes segmenta EH, FL quae datis punctis E, F adjacent, datamque habent rationem, tangit punctum G rectam positione datam per cas. 1. praecedentem.



Componetur.

Componetur vero ita.

Sit ratio FM ad FN eadem rationi datae quam sc. habere debet seg-



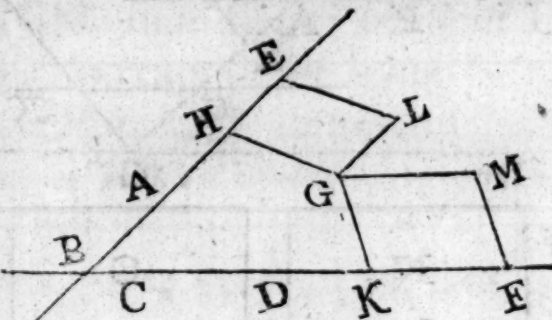
mentum rectae AB ad segmentum ipsius CD, et a puncto N ducatur NO parallela ipsi GK; per F vero ducatur FL parallela AB, occurratque NO in O: et ope praecedentis casus inveniatur recta GP quae Locus est punctorum a quorum quovis G ductae GH, GL ad parallelas AB, FO in datis angulis abscindant ex ipsis segmenta EH, FL in data ratione quam habet FM ad FO; abscindant eadem GH, GL ex ipsis AB, CD segmenta EH, FK quae rationem habebunt eandem datae rationi FM ad FN. Quoniam enim, ex constructione, est

EH ad FL, ut FM ad FO; ut vero FL ad FK, ita est FO ad FN; erit ex aequo EH ad FK, ut FM ad FN.

Schootenius huic Loco, in casu quo rectae positione datae sunt inter se parallelae, hanc sequentem addidit notam in pag. 249 EXERCITATIONUM MATHEMATICARUM, viz. "Quamvis haec Propositio universalis sit, et in quocunque rectis lineis parallelis locum obtineat, operae pretium tamen nos facturos existimavimus, si ad majorem ejus perfectionem sequentem operationem hic adjicerimus." dein tradit operationem Algebraicam qua conatur ostendere Propositionem in casu trium rectarum. Verum hic in crassum incidit errorem, calculo Algebraico, non accurate instituto, deceptus; symbolis sc. ejus calculi majus quam rei ipsi attentus. Si enim a puncto, ad tres positione datas rectas parallelas, ducantur tres rectae in datis angulis, abscindentes, datis punctis adjacentia, tria segmenta, quae inter se datas habent rationes;

nes; quis non statim percipiet punctum illud, propter duas rectas, modo jam dicto, ductas, tangere rectam positione datam? et similiter propter alterutram ex hisce duabus et tertiam ductam, idem punctum tangere rectam aliam (nam nisi ex accidente non erit eadem cum prima) positione datam; et propterea punctum illud datum esse, et Propositionem non Locum, sed Problema continere. Si vero plures quam tres parallelae positione datae sint, non poterit inveniri punctum aliquod (nisi ex accidente) proposito satisfaciens. Ex eo autem lapsus est Schootenius, quod non viderat rectam CD, seu BK quae apud eum designatur symbolis $\frac{bx-ay}{c}$, posse etiam per x-a designari: quod si fecisset, nactus fuisset aequationem, uti vocant, in qua una tantum ex incognitis x, y locum habuisset. Eundem vero errorem ex eodem fonte oriundum, repetit in casu rectarum concurrentium.

Videtur autem Propositio haec 31. Apollonianis a junioribus addita. paululum enim differt a Propositione 22. aut 23. hujus. nam ad positione datas AB, CD ductae sint GH, GK in datis angulis, abscindentes segmenta HE, KF datis punctis E, F adjacentia, quae datam inter se habent rationem; et compleantur parallelogramma EHGL, FKGM. positione igitur datae sunt EL, FM, et dati sunt anguli ad L, M, oppositis sc. ad H, K aequales. quoniam igitur a puncto G ad positione datas EL, FM ductae sunt GL, GM in datis angulis, datamque habentes rationem, (aequales enim sunt ipsis HE, KF) tanget punctum G rectam positione datam per Prop. 22. aut 23. hujus. quoniam vero apud Pappum habetur Propositio haec, solutionem ipsi propriam dedimus, eique Propositionem 30. quae apud Pappum non extat, praemissimus.



et ducta KL ipsi GM parallelâ, spatium quaesitum aequale erit rectangulo GKL ; est autem, propter parallelas KH , ad KL , ut GH ad GM ; quare per 1. 6. erit rectangulum GKH ad ipsum GKL , ut quadratum ex GH ad rectangulum HGM ; et est GKH aequale quadrato ex GK , hoc est quartae parti quadrati ex GH ; ergo rectangulum GKL quarta pars est ipsius HGM . Spatium vero hoc GKL maximum esse eorum quae contineri possunt rectis a quovis puncto A inter parallelas, ad ipsas, in datis angulis ductis, manifestum est; nam quoniam est KH ad KL , ut AH ad AF , erit rectangulum GKH ad ipsum GKL , ut GAH ad GAF ; majus autem est GKH ipso GAH [5. 2.] quare majus est GKL ipso GAF ; ideoque est GKL maximum.

Componetur vero Locus propositus ita,

Ducantur ad BC , a quovis in ipsa DE puncto, rectae GH, GM in datis angulis, sitque spatium datum aequale ipsi N ; si igitur spatium N majus fuerit quarta parte rectanguli HGM , non poterit construi Locus; quoniam spatium datum majus est maximo. Sit igitur N non majus quarta parte ipsius HGM ; et ut GM ad GH , ita fiat N ad aliud spatium O ; et per 1. 6. erit rectangulum HGM ad quadratum ex GH , ut spatium N ad ipsum O ; est autem N non majus ipsius HGM quarta parte; quare O non majus erit quarta parte quadrati ex GH , hoc est non majus erit quadrato ex GK dimidio ipsius GH , ergo ad HG applicari potest rectangulum aequale ipsi O , deficiens quadrato [28.6.]. applicetur; sintque A, α applicationum puncta, erit utraque recta $AP, \alpha\pi$, quae per ipsa ducuntur parallelae ipsi BC , Locus quaesitus; hoc est si a quovis in utraque ipsarum puncto A , ducantur ad BC, DE , rectae AF, AG ipsis GM, GH parallelae, erit rectangulum GAF aequale spatio N . nam quoniam rectangulum GAF , est ad rectangulum GAH ut $(AF$ ad AH , hoc est ut GM ad GH , hoc est ex constructione, ut) spatium N ad spatium O ; et rectangulum GAH aequale est, ex constructione, spatio O , erit rectangulum GAF aequale ipsi N , hoc est spatio dato.

AHK, datusque propterea erit angulus AHK, dataque erit ratio KH ad HA. Ex hypothese autem data est summa quadratorum, ex GA, AF, seu ex GA, AK; quare datum est quadratum ex GK, et ipsa GK magnitudine; sed et GH magnitudine data est [32. dat.], quare data est ratio GH ad GK, et datus ostensus est angulus GHK; ideoque data est ratio GH ad HK [44. dat.]; et data est GH, quare et HK. et data ostensa fuit ratio KH ad HA, quare HA magnitudine data est [2. dat.], et datus est angulus AHC et recta BC positione, quare tangit punctum A rectam positione datam per Prop. 20. hujus.

Quoniam vero ad compositionem requiritur ut, a dato quovis puncto G in recta DE ducta GH faciente angulum HGD aequalem dato angulo, ponatur GK magnitudinis datae inter datum punctum G et rectam positione datam HK; quod non semper fieri potest; igitur Locus non semper poterit construi, quoties sc. recta GK quae potest spatium datum, minor fuerit perpendiculari ducta a puncto G ad ipsam HK. Unica vero solutio habebitur, si recta GK perpendiculari illo aequalis fuerit. Spatium autem quod hoc efficiet, et Locus in eo casu ita invenientur. puta factum sc. sit a punctum in Loco quaesito, ductisque $a f$, $a G$ ad ipsas BC, DE in angulis datis, ipsi $a H$ ad rectos angulos ducatur $a M$ aequalis ipsi $a f$; et ducta HM, requiritur ut juncta GM ad ipsam sit perpendicularis. dabitur igitur angulus rectus GMH, angulus vero GHM datus ostendetur ut in praemissis; quare specie dabitur triangulum GHM, et data est GH, quare et GM quae sc. potest quadrata ex $G a$, $a M$. recta autem Ha eodem modo quo HA, in praemissis, data ostendetur.

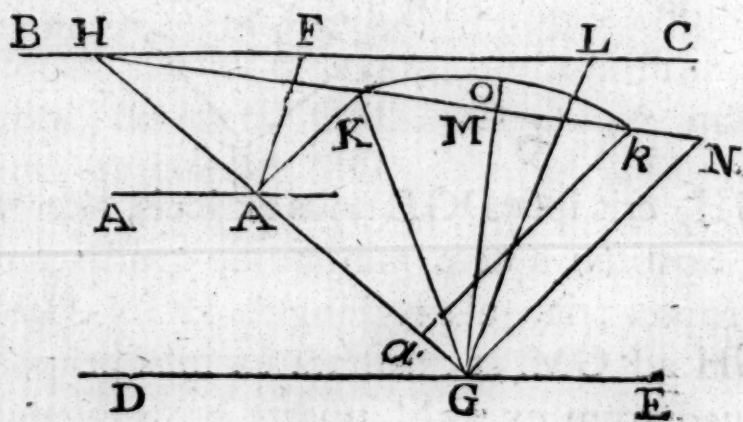
Componetur hoc ita.

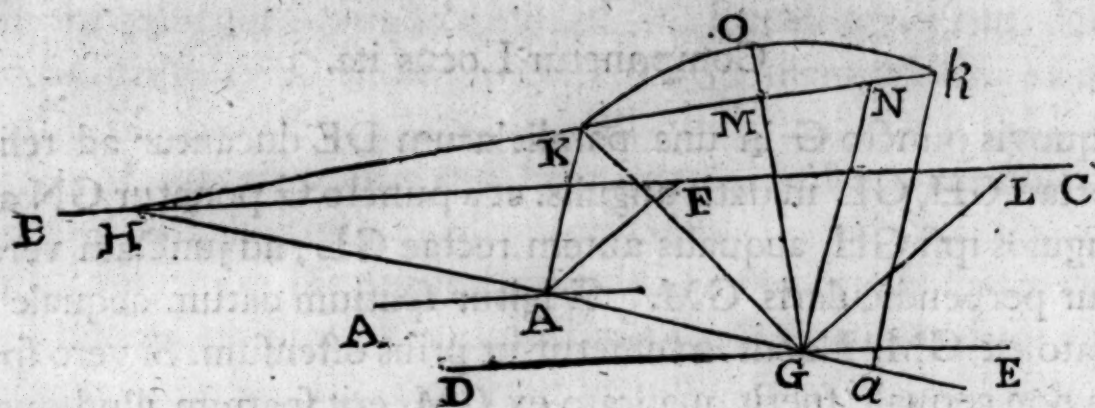
Ducantur a quovis puncto G in una parallelarum rectae GH, GL in angulis datis, et GN ad rectos angulos ipsi GH, aequalis autem rectae GL; et ad junctam HN perpendicularis ducatur GM; erit quadratum ex GM spatium quaesitum. ad GH vero ducatur perpendicularis Ma; erit

Componetur Locus ita.

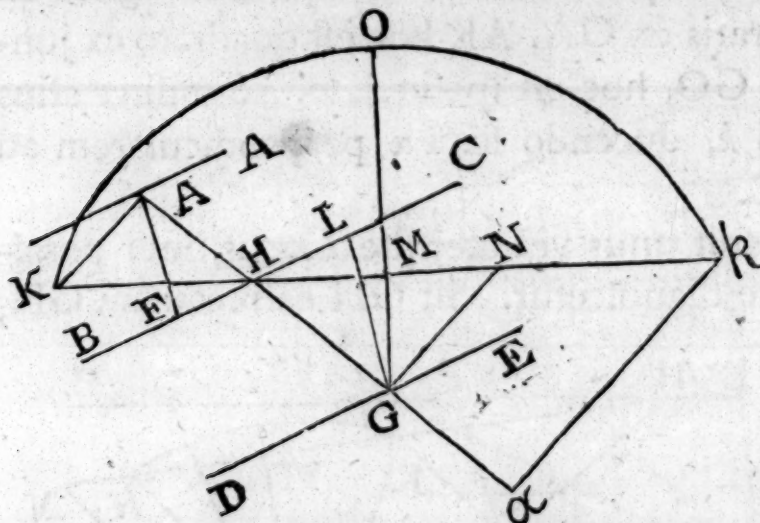
A quovis puncto G in una parallelarum DE ducantur ad reliquam BC rectae GH , GL in datis angulis. et a puncto G ponatur GN ad rectos angulos ipsi GH , aequalis autem rectae GL ; ad junctam vero HN ducatur perpendicularis GM . Si igitur spatium datum aequale fuerit quadrato ex GM , Locus invenietur ut prius ostensum. Si vero spatium datum non aequale fuerit quadrato ex GM , erit spatium illud quadrato hoc necessario majus, quoniam sc. quadratum ex GM ostensum est spatium minimum. Sit igitur spatium datum aequale quadrato ex recta GO quae sc. major est ipsa GM ; et centro G intervallo GO describatur circulus qui rectam HN necessario secabit in duobus punctis K, k . a quovis eorum K ducatur ad GH perpendicularis KA , et per A ducatur AA ipsi BC parallela. Erit haec Locus quaesitus. Ducatur enim AF parallela rectae GL ; et quoniam propter parallelas, est GL ad AF , ut $(GH$ ad AH , hoc est ut) GN ad AK ; et ex constructione aequales sunt GL , GN ; erit AF ipsi AK aequalis. quadrata igitur ex GA , AF aequalia sunt (quadratis ex GA , AK hoc est quadrato ex junctâ GK hoc est) quadrato ex GO , hoc est spatio dato. Similiter alius Locus invenietur ope puncti k , ducendo sc. ka perpendicularem ad GH et aa parallelam ipsi BC .

In quibus autem casibus cadit unus vel uterque Locus inter parallelas vel extra easdem ita facile dignoscetur. Sit GH ea rectarum GH , GL quae non minor est reliqua. Et si spatium datum minus sit quadrato ex GL , hoc est si recta GO minor sit ipsa GL , manifestum est puncta K, k cadere inter puncta H, N . Sunt enim H, N extra circulum, quoniam GO minor est GL , hoc est ipsa GN ; punctum autem M quod cadit inter H, N quia rectus est angulus





gulus HGN, est intra circulum; quare K, *k* cadunt inter puncta H, N. igitur in hoc casu puncta A, *a* cadunt inter G, H puncta, hoc est uterque Locus cadit inter parallelas. Si vero GO major fuerit ipsa GN seu GL, minor autem quam GH, cadet punctum K, ut antea, inter puncta H, N; punctum vero *k* cadet in HN producta, est enim N intra circulum. quare in hoc casu cadet A inter G, H puncta, *a* vero in HG producta ad partes G. At si GO major fuerit ipsa GH, et propterea major quam GL seu GN cadet punctum K in HN producta ad partes H; *k* vero in eadem ad partes N producta. quare A



erit in GH ad partes H, α
 vero in GH ad partes G pro-
 ducta, ideoque uterque Lo-
 cus cadit extra parallelas.

Denique si GO aequalis fuerit ipsi GL seu GN , circulus transibit per punctum N quod propterea idem erit cum puncto k ; et quoniam NG perpendicularis est ad

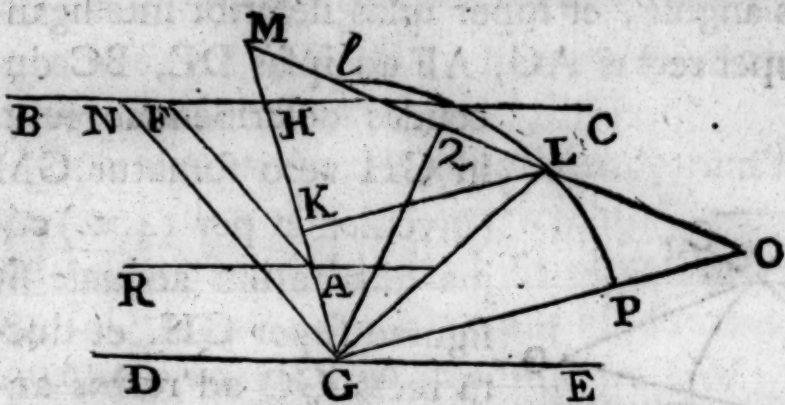
GH, erit ipsa DGE unus ex locis, alter vero cadet inter parallelas.

Spatium autem minimum, quadratum sc. ex GM ita determinatur. Propter triacula rectangula HGN, HGM, erit [8. 6.] HN ad NG, ut GH ad GM. et quadrata ex ipsis proportionalia sunt [22. 6.], hoc est quadratum ex GM quarta proportionalis est summae quadratorum ex GH, GL, quadrato ex GL, et quadrato ex GH.

CAS.

CAS. 2. Quando figurae speciei datae non sunt quadrata.

A puncto A ductae sint AF, AG ad parallelas BC, DE, positione
 datas in datis angulis, et ab ipsis AF, AG descriptae sint figurae specie
 datae, dataque sit ipsarum
 summa; tanget punctum A
 rectam positione datam.

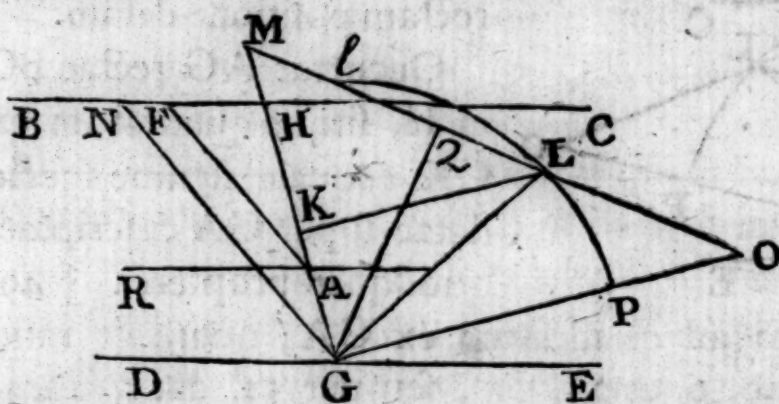


Occurrat AG rectae BC
in H, sitque quadratum ex
GK aequale figurae specie
datae super GA descriptae,
quodque propterea [49.

dat.] datam habebit rationem ad quadratum ex GA; quare et ratio GK ad GA data erit [cor. 20. 6. et 24. dat., seu per 54. dat.]. ducatur KL ad rectos angulos ipsi GK, fitque quadratum ex KL aequale figurae speciei datae super AF descriptae, et similiter ratio KL ad AF data ostendetur. fiat autem GM ad GH, ut GK ad GA, et ita erit [19. 5.] reliqua KM ad reliquam AH; ergo datae sunt rationes KM ad AH, et GM ad GH. et data est GH magnitudine [32. dat.], quare et GM. Jungantur GL, LM, et quoniam data est ratio KM ad AH, et ratio AH ad AF, ut et ratio AF ad KL; dabitur [8. dat.] ratio KM ad KL; datusque est angulus MKL, quare [41. dat.] datus est angulus KML, et ratio ML ad MK. data autem ex hypothese est summa specierum super AG, AF, hoc est summa quadratorum ex GK, KL, ergo datum est quadratum ex GL, et ipsa GL magnitudine dabitur, quare ad datam GM datam habebit rationem. et datus est angulus GML, speciei igitur [44. dat.] datum est GML triangulum, quare et ratio LM ad MG data est, et data est MG, quare et LM. Et datae ostensae sunt rationes LM ad MK, et MK ad AH; ergo [8. dat.] data est ratio LM ad AH; et data est LM, ergo AH magnitudine data est. et datus est angulus AHC, et recta BC positione. Quare tangit punctum A rectam positione datam per Prop. 20. huj.

Componetur vero ita.

A quovis puncto G in una parallelarum DE , ducantur ad reliquam BC , rectae GH , GN in datis angulis, et super ipsas describi intelligantur figurae similes iis quae super rectas AG , AF ad ipsas DE , BC du-



cendas describendae sunt. in GH vero sumatur GM (invenienda per 14. 2.) cujus quadratum aequale sit figurae super GH . et ducta recta GO ad rectos angulos ipsi GH , in ea eodem modo sumatur GO cujus

quadratum aequale sit figurae super GN , et jungatur MO . Spatium autem datum, cui aequalis debet esse summa figurarum super ipsas AG , AF , aequale sit quadrato ex GP . Manifestum autem est, eo modo quo in praecedente casu simile ostensum fuit, debere GP non minorem esse recta GQ quae perpendicularis ducitur a puncto G ad rectam MO . et centro G , intervallo GP , describatur circulus, rectae MO in uno vel duobus punctis occurrens, quorum unum sit L , a quo ad GM ducatur perpendicularis LK . Ut vero GM ad GH ita fiet GK ad GA (et ita erit KM ad AH), et per A ducatur AR parallela ipsi BC ; erit AR Locus quaesitus. ducatur enim AF parallela ipsi GN ; et quoniam propter parallelas est GO ad GM , ut KL ad KM ; ut vero GM ad GH ; ita ex constructione est KM ad AH ; et ut GH ad GN , ita propter parallelas est AH ad AF ; erit ex aequo GO ad GN , ut KL ad AF ; et permutando ut GO ad KL , ita GN ad AF , ergo [22. 6.] est quadratum ex GO ad illud ex KL , ut figura super GN ad figuram similem similiterque descriptam super AF . Ex constructione autem quadratum ex GO aequale est figurae super GN , quare quadratum ex KL aequale est figurae super AF . Et quoniam ex constructione est GM ad GH , ut GK ad GA , erit permutando GM ad GK , ut GH ad GA . Ergo [22. 6.] est quadratum ex GM ad illud

lud ex GK, ut figura super GH ad figuram similem similiterque descriptam super GA. Est autem quadratum ex GM aequale figurae super GH, quare quadratum ex GK aequale est figurae super GA descriptae. Ergo figurae super GA, AF descriptae simul aequales sunt quadratis ex GK, KL, hoc est quadrato ex GL seu GP, hoc est spatio dato.

Spatium autem minimum, quadratum sc. ex GQ, eodem modo quo in praecedente casu determinatur. est enim MO ad GO, ut GM ad GQ, et quadrata ex ipsis proportionalia sunt; hoc est quadratum ex GQ quarta proportionalis est summae quadratorum ex GM, GO; quadrato ex GO, et quadrato ex GM; seu, quod idem est, summae figurarum super GN, GH, figurae super GN, et figurae super GH.

PROP. XXXIV.

SI a puncto A ducantur ad duas positione datas parallelas BC, DE, rectae AF, AG in datis angulis AFB, AGD; fueritque excessus specierum (hoc est figurarum quae specie datae sunt) ex ductis, aequalis spatio dato: tanget punctum A rectam positione datam.

CAS. I. Quando figurae specie datae sunt quadrata.

Sit AG ea ductarum quae major est altera AF, et quoniam ex hypothesis quadratum ex AG aequale est quadrato ex AF, una cum spatio dato, si ducatur FH ad rectos angulos ipsi AF, et in ea sumatur FK cujus quadratum aequale sit spatio dato, erit juncta AK aequalis ipsi AG [47. 1.]. Occurrat AF ipsi DE in L, et magnitudine dabitur

Q 2

FL,

lelam ducendo KA vel Ka. Quoniam vero circulus hic non semper occurrere poterit rectae KL, ideo neque Locus semper construi poterit. Manifestum autem est, si vel punctum L vel punctum K intra circulum inveniatur, hoc est si recta FM major fuerit unâ vel utrâque ipsarum FL, FK, rectam LK necessario circulo, in duobus punctis, occurrere. quare in his casibus Locus semper construi poterit. Si vero FM minor fuerit utrâque ipsarum FL, FK, in quo casu puncta L, K extra circulum invenientur, poterit recta LK vel circulum secare, vel ipsum contingere, vel extra eundem cadere. Si autem LK circulum contigerit unica erit recta proposito satisfaciens. Et spatium cui in hoc casu aequalis debet esse excessus quadratorum ex AG, AF, invenietur ducendo a puncto L rectam LO, quae circulum contingat in O. Occurrat enim LO ipsi FK in P; erit quadratum ex FP spatium quaesitum. et ad FL ductâ PQ parallelâ junctae FO, erit recta QR, quae per Q ducta est ipsi BC parallela, Locus in hoc casu quaesitus. ductis enim, a quovis in ipsa puncto Q, rectis QS, QF ad parallelas DE, BC in datis angulis, erit excessus quadratorum ex ipsis, aequalis quadrato ex FP. Est enim, propter parallelas, QS ad FM, seu FO; ut (QL ad FL, hoc est ut) QP ad FO aequales igitur sunt QS, QP. quare et excessus quadratorum ex QS, QF aequalis est excessui quadratorum ex QP, QF, hoc est quadrato ex FP.

Inquirendum autem est an spatium hoc, quadratum sc. ex FP, majus aut minus sit spatio, cui aequalis est excessus quadratorum a rectis quae ipsis FL, FM parallelae ducuntur a quovis puncto extra rectam QR. Sit A istiusmodi quodvis punctum, et ductis AF, AG ipsis FL, FM parallelis; ducatur ad LP recta AT ipsi QP, seu FO, parallela, et AP jungatur. et quoniam est AG ad FM, seu FO, ut (AL ad FL, hoc est) ut AT ad FO, aequales erunt AG, AT. Est autem, propter angulum ATP rectum, AP major AT; quare excessus quadratorum ex AP, AF, hoc est excessus eorum quae fiunt ex QP, QF, (quadratum sc. ex FP) major est excessu eorum quae fiunt ex AG, AF

Pt, major est excessu eorum qui fiunt ex *PF*, *PT*, et retrogradiendo ostendetur excessus quadratorum ex *ag*, *aF*, major excessu eorum quæ fiunt ex *AG*, *AF*. hisce præmissis reliqua compositio ita fiet.

Ductis, ut prius dictum, *FL*, *FM*, *FK*, *LK*, quarum *FK* potest spatium datum, et descripto circulo, centro *F*, intervallo *FM*, ductâque ipsum contingente *LO*; si recta *LK* circulo non occurrat, Locus non poterit construi; si vero ipsum contingat, construetur Locus ut in præmissis ostensum fuit. Si vero circulo occurrat *LK* in duobus punctis *N*, *n*, a quovis eorum *N* ducatur recta ad punctum *F*, et ipsi *NF* parallela ducatur *KA*, rectæ *LF* occurrens in *A*, et per *A* ducatur *AV* parallela ipsi *BC*; erit hæc Locus quaesitus. a quovis enim in ipsa puncto *A*, ducantur *AG*, *AF* parallelæ ipsis *FM*, *FL*; et quoniam est *AG* ad *FM*, seu *FN*, ut (*AL* ad *FL*, hoc est) ut *AK* ad *FN*, erunt inter se æquales *AG*, *AK*. quare excessus quadratorum ex *AG*, *AF* æqualis erit excessui eorum quæ fiunt ex *AK*, *AF*, hoc est quadrato ex *FK*, seu spatio dato.

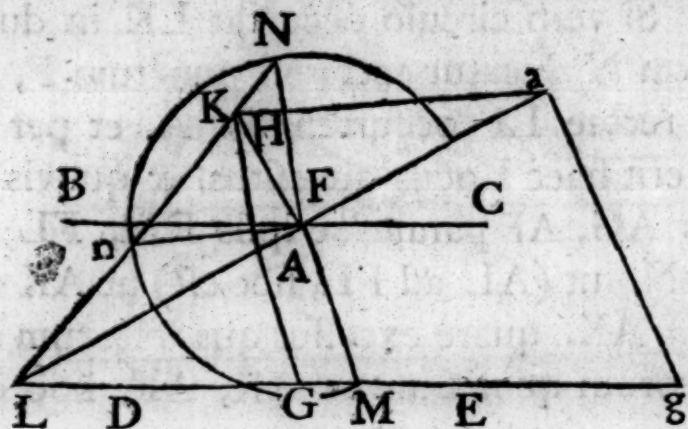
Spatium autem maximum, quadratum sc. ex *FP*, ita determinatur. Jungatur *FO*, et propter æquiangula triangula *OLF*, *OFP*, erit [8. 6.] *OL* ad *LF*, ut *OF* ad *FP*. et quadrata ex ipsis proportionalia erunt; hoc est spatium maximum, quadratum sc. ex *FP*, quantum est proportionale quadrato ex *OL*, hoc est excessui quadrati ex *FL* supra quadratum ex *OF*, seu *FM*, et quadratis ex ipsis *LF*, *FM*.

Casus vero in quibus Locus *AV* cadit vel inter parallelas *BC*, *DE* vel extra ipsas, seu ad partes rectæ *BC*, seu ad partes ipsius *DE*, ita distingui possunt.

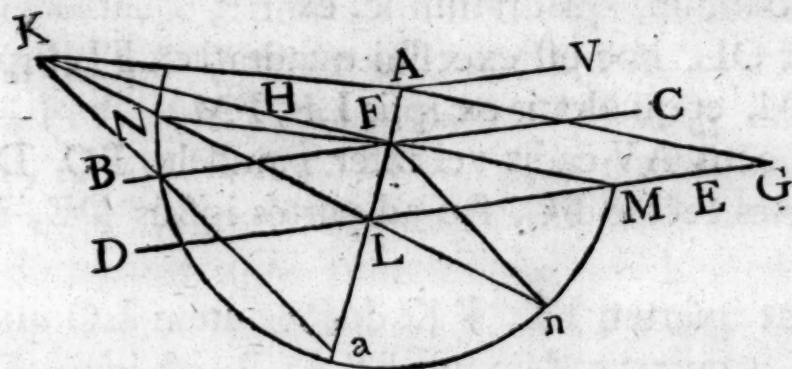
i. Sit *FM* minor utrâque ipsarum *FL*, *FK*. ductâ autem *LO* quæ contingat circulum in *O*, occurrat eadem ipsi *FK* in *P*; est igitur *FK* non major quam *FP* ut in determinatione ostensum fuit. quare juncta *LK* vel coincidet cum *LP*, vel circulum in duobus punctis *N*, *n* secabit, in utroque autem casu patet rectam *PQ* quæ in primo casu, ipsi *OF* parallela est, vel rectas *KA*, *Ka* quæ, in altero casu, ipsis *NF*, *nF* parallelæ sunt, occurrere rectæ *LF* productæ versus partes *F*. Quare in hoc casu Locus *QR*, vel *AV*, *av*, semper extra parallelas invenietur.

Si vero FM aequalis fuerit ipsi FL, minor autem quam FK, coincidet L puncto n , quare recta, quae per K ducta est parallela ipsi nF , seu LF nunquam eidem occurret, et unica recta AV erit Locus. At si FM aequalis fuerit ipsi FK, minor autem quam FL, coincidet K puncto N, quare cadet A in F, et ipsa BC erit alter ex Locis.

2. Sit FM minor FL major autem FK. Erit igitur punctum L extra, et punctum K intra circulum. et quoniam punctum K est in latere LN

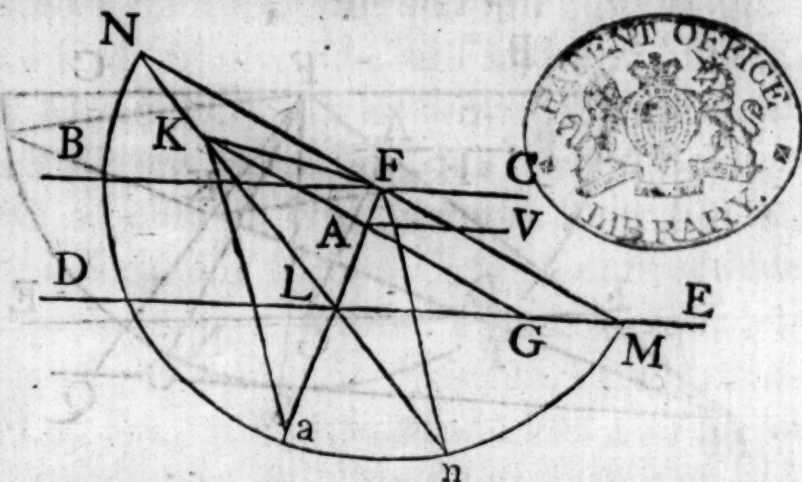


3. Sit FM major FL, minor autem FK. punctum igitur L est intra
circulum, et punctum K



est in latere nL trianguli FLn ultra verticem L producto, erit punctum a in latere FL ultra eundem verticem producto, et locus erit extra parallelas ad partes ipsius DE . Si autem FM aequalis fuerit ipsi FL coincidet L puncto n , quare recta quae per K ducta est parallela ipsi nF , seu LF nunquam eidem occurret, et unica recta AV erit Locus.

4. Quando FM major est utraque ipsarum FL, FK; puncta igitur L, K sunt intra circulum. et quoniam punctum K est in latere LN trianguli FLN, erit punctum A in latere FL, quare Locus est inter parallelas. quoniam vero idem K est in latere nL trianguli FLn ultra verticem L producto, erit a in latere FL ultra eundem verticem producto. quare Locus erit extra parallelas ad partes ipsius DE.



Si autem FM aequalis fuerit ipsi FL, coincidat L puncto n, quare recta quae per K ducta est ipsi nF, seu LF parallela, nunquam eidem occurret, et unica recta AV erit Locus.

CAS. 2. Quando figurae speciei datae non sunt quadrata.

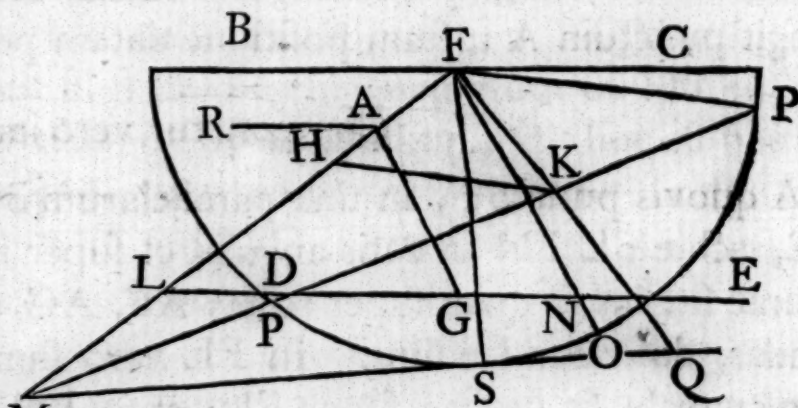
A puncto A ductae sint ad parallelas positione datas BC, DE, rectae AF, AG in datis angulis; et ab ipsis descriptae sint figurae speciei datae, quarum excessus aequalis sit spatio dato. tanget punctum A rectam positione datam.

Sit AG ea ductarum super quam figura descripta major est figurâ super alteram, sitque quadratum ex FH aequale figurae super AF.

a puncto vero F, ducatur recta ipsi AF ad rectos angulos, et in ea sumatur FK cujus quadratum aequale sit dato spatio, et jungatur HK. Quoniam igitur, ex hypothesi, figura super AG, aequalis est figurae super AF, una cum quadrato ex FK, hoc est quadratis ex HF, FK, hoc est quadrato ex HK; figura super AG aequalis erit quadrato ex HK. quare,

R

per



parallela ducatur KH, occurrens FL in H. Ut vero FM ad FL ita fiat HF ad FA (et ita erit HM ad AL), et per A ducatur AR parallela ipsi BC; erit AR Locus quaesitus. ducatur enim AG parallela ipsi FN; et quoniam est FP ad FM, ut HK ad HM; ut vero FM ad FL, ita est HM ad AL; et ut FL ad FN, ita est AL ad AG; erit ex aequo FP ad FN, ut HK ad AG, et permutando est FP seu FO ad HK, ut FN ad AG. Ergo [22. 6.] est quadratum ex FO ad illud ex HK, ut figura super FN ad figuram similem similiterque descriptam super AG. ex constructione autem quadratum ex FO aequale est figurae super FN, quare quadratum ex HK aequale est figurae super AG. Et quoniam, ex constructione, est FM ad FL, ut FH ad FA; erit permutando FM ad FH, ut FL ad FA. et per 22. 6. ut quadratum ex FM ad quadratum ex FH, ita figura super FL ad figuram super FA similem similiterque descriptam. est autem ex constructione, quadratum ex FM aequale figurae super FL, quare quadratum ex FH aequale est figurae super AF. Ergo excessus figurae super AG supra figuram super AF, aequalis est excessui quadrati ex HK super quadratum ex FH, hoc est quadrato ex FK, hoc est spatium dato.

Spatium autem maximum, quadratum sc. ex FQ, determinatur eodem modo ut in praecedente casu. contingat enim MQ circulum in S, et jungatur FS, et, per 8. et 22. 6. erit quadratum ex SM ad quadratum ex MF, ut quadratum ex SF ad illud ex FQ. hoc est spatium maximum quadratum ex FQ, quartum est proportionale excessui quadrati ex MF supra illud ex FS seu FO, et quadratis ex MF, FO. seu quod idem est excessui figurae super FL supra eum super FN, et ipsis figuris super FL, FN.

Schootenius casus secundos, duarum ultimo praecedentium propositionum, nullatenus ostendit; putat vero eos solutos iri ope 77. datorum, in qua re omnino deceptus est, figurae enim specie datae de quibus in istis casibus agitur, datam inter se rationem minime habere supponuntur.

APOLLONII PERGAEI

LOCORUM PLANORUM



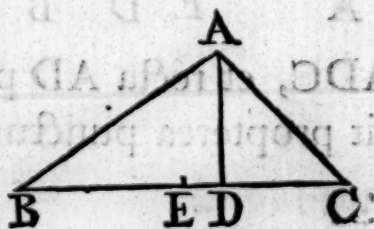
LIBER SE CUNDUS.

LEMMA I.

Lemma hoc est Prop. cxx. lib. septimi Pappi Alexandrini, quodque ibi dicitur Lemma in Locum secundum.

SIT triangulum ABC, et perpendicularis AD; dico excessum quadratorum ex BA, AC, quadratorum ex BD, DC excessui aequalem esse. Quod si BC bifariam secetur in puncto E, erit quadratorum ex BA, AC excessus id quod bis BC et ED continetur.

Quo enim quadratum ex AB excedit quadratum ex AC, eodem [47. 1.] quadrata ex AD, DB excedunt quadrata ex AD, DC; et dempto communi quadrato ex AD, quo reliquum quadratum ex BD excedit quadratum ex DC, eodem et quadratum ex AB excedet quadratum ex AC; quod erat primum. Et quoniam BE aequalis est EC, erit BD aequalis utrisque CE, ED; quadratum autem ex CE, ED tanquam una linea, excedit [per 8. 2.] quadratum ex DC, rectangulo CED quater, hoc est rectangulo quod bis BC, ED continetur;



tur; excessus igitur quadratorum ex BD, DC, seu excessus quadrato-
ex AB, AC, est id quod bis BC, DE continetur. quod erat alterum.

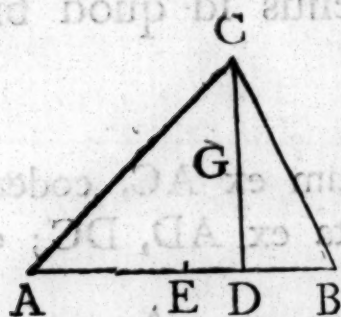
PROP. I.

*Propositiones septem priores hujus libri secundi sequuntur eodem ordine quo
sunt apud Pappum enarratae.*

SI a duobus punctis datis inflectantur duae rectae lineae,
sintque quadrata quae ab ipsis fiunt, dato spatio differentia:
tangent punctum [occursus sc.] rectam positione datam.

Sint A, B, puncta data, et ab ipsis inflectantur rectae AC, BC; sit-
que excessus quadrati ex AC supra quadratum ex BC, aequalis spatio
dato: tangent punctum C rectam positione datam.

Jungatur enim AB, ad quam ducta perpendiculari CD, bifariam-
que secta AB in E; erit, per Lemma praecedens, excessus quadrato-
rum ex AC, CB, aequalis rectangulo quod bis AB, ED continetur;
datus autem, ex hypothese, est excessus quadra-
torum ex AC, CB; quare datum est rectangu-
lum contentum bis AB, ED; ideoque dabitur ip-
sum rectangulum AB, ED; et data est AB posi-
tione et magnitudine; quare ED magnitudine da-
ta est; et datum est punctum E, ideoque et punc-
tum D [27. dat.]; datusque est angulus rectus
ADC, et recta AD positione; ergo [29. dat.] DC positione data; tan-
git propterea punctum C rectam positione datam.



Componetur vero ita.

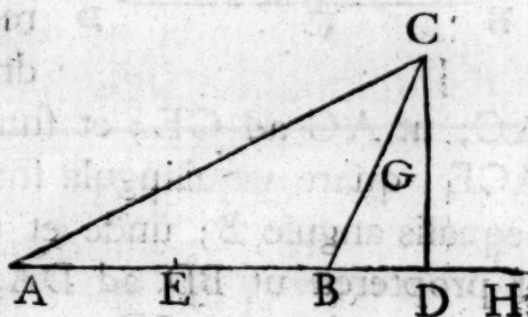
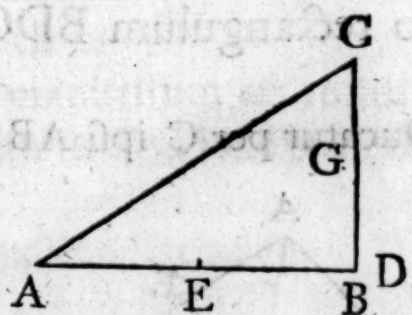
Sit datus excessus quadratorum aequalis spatio F, sitque punctum
A illud a quo major inflexarum ducenda est; bifariamque secta AB
in

in E, ponatur a puncto E, versus partes puncti B, recta ED, quae faciat rectangulum contentum ipsa ED, et recta AB bis, aequale spatio F; et ducatur DG ad rectos angulos ipsi AD: erit DG Locus quaesitus; hoc est, si ad quodvis in ipsa punctum C inflectantur AC, BC; erit excessus quadratorum ex ipsis aequalis spatio dato F. Est enim excessus quadratorum ex AC, CB [per Lemma] aequalis rectangulo contento bis AB, ED, hoc est, ex constructione, spatio dato F.

Si spatium datum F minus fuerit quadrato ex AB, hoc est quadrato ex ejus dimidio EB quater sumpto; erit rectangulum BED quater, minus quadrato ex EB quater; quare ED recta minor erit ipsa EB, et cadet punctum D inter E et B; si autem spatium F aequale sit quadrato ex AB, cadet punctum D in ipsum B; et si majus fuerit spatium F quadrato ex AB, cadet D in EB producta, ut patet.

Schootenii constructio quae fit faciendo rectangulum BAH aequale spatio dato, et bifariam secando HB in D, eadem re ipsa est cum praecedente; nam quoniam AH dupla est ipsius ED, erit rectangulum contentum ED et AB bis aequale rectangulo BAH, hoc est spatio dato.

Praecedens vero ea est quam ex Pappi Lemmate videtur Apollonium dedisse.



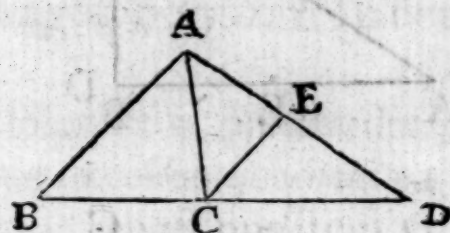
LEMMA

LEMMA II.

Est Prop. cxix. lib. septimi Pappi Alexandrini, quae ibi dicitur Lemma in Locum primum libri secundi.

SIT triangulum ABC, et ducatur recta linea AD, ita ut BD fit ad DC, ut quadratum ex BA ad quadratum ex AC; dico rectangulum BDC quadrato ex AD aequale esse.

Ducatur per C ipsi AB parallela CE; est igitur BD ad DC, ut AB



ad CE, et ita quadratum ex AB ad rectangulum quod AB et CE continetur. ut autem BD ad DC, ita, ex hypothesi, est quadratum ex BA ad quadratum ex AC. Ergo rectangulum contentum AB et CE, quadrato ex AC est aequale; est igitur AB ad AC, ut AC ad CE; et sunt circa aequales angulos alternos BAC, ACE; quare aequiangula sunt BAC, ACE triangu-
la, et angulus CAD aequalis angulo B; unde et triangu-
la ABD, CAD aequiangula sunt; et propterea ut BD ad DA, ita DA ad DC; ideoque rectangulum BDC, quadrato ex AD aequale erit.

PROP. II.

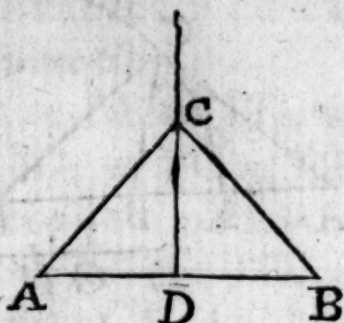
SI a duobus punctis datis inflectantur duae rectae lineae, datam habentes rationem; tanget punctum [occurfus sc.] rectam lineam vel circumferentiam positione datam.

CAS. I. Quando ratio data, est ratio aequalis ad aequale.

Sint

Sint A, B puncta data, et inflectantur AC, BC inter se aequales: tanget punctum C rectam positione datam.

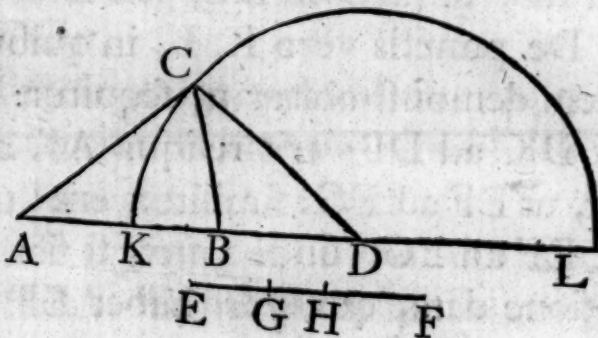
Ducatur enim ad junctam AB perpendicularis CD; quoniam igitur aequales sunt AC, CB, erit AD aequalis ipsi DB [26. 1.]; et data est AB positione et magnitudine, quare datum punctum D; et datus est angulus ADC; positione igitur data est DC, [29. dat.]: et propterea tangit C rectam positione datam.



Compositio patet; bifariam enim secta AB in D, et ducta DC ipsi AD ad rectos angulos, manifestum est rectas AC, BC a punctis A, B ad quodcunque punctum in DC inflexas, inter se aequales esse.

CAS. 2. Quando ratio data non est aequalis ad aequale.

Sint A, B puncta data, et inflectantur inaequales AC, BC, datam habentes rationem: tanget punctum C circumferentiam positione datam.



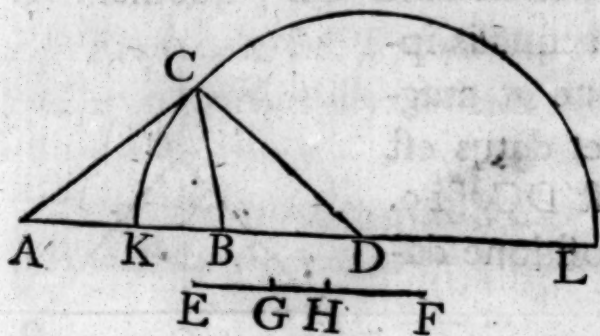
Quoniam enim data est ratio AC ad CB, dabitur [50. dat.] ratio quadrati ex AC ad quadratum ex CB; producatu AB ad D, ut in hac ratione sit AD ad DB; et propter

AB positione et magnitudine datam, et datam rationem AD ad DB, dabitur punctum D, et ipsae AD, DB, quare rectangulum ADB datum est; huic vero, per Lemma 2, aequale est quadratum ex juncta DC, quod propterea datum erit; ipsaque DC magnitudine dabitur; et datum ostensum est punctum D; ergo tangit punctum C circumferentiam positione datam, per Prop. 1. Lib. 1. huj.

Componetur vero ita.

Sit ratio data eadem rationi EF ad FG, et ipsis EF, FG tertia proportionalis inveniatur FH, et in AB producta sumatur punctum D,
S quod

quod faciat AD ad DB, ut EF ad FH, dein inter AD, DB invenia-
tur media proportionalis DK; centroque D, intervallo DK, descri-



batur circulus; erit hujus circum-
ferentia Locus quaesitus; hoc est,
si a datis punctis A, B, inflectantur
ad quodvis in circumferentia punc-
tum rectae AC, BC; erit AC ad
BC, in data ratione, quam habet
EF ad FG. Jungatur enim DC;
et quoniam proportionales sunt,

AD, DK, DB, erit quadratum ex AD [cor. 20. 6.] ad quadratum
ex DK, ut (AD ad DB, hoc est ut EF ad FH, hoc est ut) quadratum
ex EF ad quadratum ex EG [cor. 20. 6.]. Quare [22. 6.] est AD
ad DK, ut EF ad FG. Quoniam vero est AD ad DK seu DC, ut
DC ad DB, erunt ADC, DCB triangula aequiangula; ergo est AC
ad BC, ut (AD ad DC, seu DK, hoc est ut) EF ad FG.

De punctis vero K, L, in quibus circumferentia rectae AB occurrit,
idem demonstrabitur ut sequitur: Quoniam est AD ad DK, seu DL,
ut DK ad DB; erit reliqua AK ad reliquam KB, ut AD ad DK, hoc
est, ut EF ad FG: similiter, erit [12. 5.] AL ad LB, ut AD ad DK, seu
ut EF ad FG. unde patet, si fiat tum AK ad KB, tum AL ad LB in
ratione data, quam sc. habet EF ad FG, fore KL diametrum circuli
Localis.

Hic est Locus cujus constructionem exhibet Eutocius in commen-
tariis in Praefationem Apollonii ad Lib. 1. Conicorum, quamque per
ambages nimias ibi demonstrat, unde Hugenus in Lemmate 5. Di-
optricae, huic merito praefert Schootenii demonstrationem. Quare
eidem constructioni, bonae quidem, quaeque forsitan est ipsius Apol-
lonii, sed cui Sciolus quidam demonstrationem illam longam subjun-
xit, visum est sequentem breviorē aptare.

Propositio, ut apud Eutocium habetur pag. 11. Conicorum Apollo-
nii, ex edit. Cl. Halleii, ita enunciatur:

Datis duobus punctis in plano, et data ratione inaequalium recta-
ru m

rum: potest in plano circulus describi, ita ut rectae a datis punctis ad circumferentiam circuli inclinatae, habeant rationem eandem datae rationi.

Sint data puncta A, B; ratio autem data, quam habet EF ad FG, sitque EF major: et oporteat facere quod propositum est.

Jungatur AB, et ad partes B producatum, et fiat ut EF ad FG, ita FG ad FH; rursus fiat ut EH ad AB, ita HF ad BD, et FG ad DK. Quoniam igitur est EH ad AB, ut HF ad BD, erit [12. 5.] EF ad AD, ut (EH ad AB, hoc est, ut) FG ad DK, et ut HF ad BD. et, permutando, erit EF ad FG, ut AD ad DK; ut vero GF ad FH, ita KD ad DB. et proportionales sunt EF, FG, FH; quare et AD, DK, DB sunt proportionales [11. 5.]. Centro D, intervallo DK, circulus describatur, et in circumferentia sumatur quodvis punctum C, et jungantur CA, CB, CD. Quoniam igitur est AD ad DK seu DC, ut DC ad DB; et sunt circa eundem angulum latera proportionalia, erit [6. 6.] triangulum ADC simile ipsi CDB: ergo est AC ad CB, ut AD ad DC seu DK, hoc est, ut EF ad FG.

Apud Eutocium addita est demonstratio, quâ ostenditur, rectas a punctis A, B ad punctum quod non est in circumferentia circuli KC ductas, non habere rationem eandem rationi EF ad FG. et quidem necessarium hoc esset, si analysis praemissa non fuisset. Ex ea enim constat, punctum ad quod rectae a punctis A, B ductae, habent rationem eandem quam EF ad FG, fore in circumferentia circuli KC. Unde si sumatur punctum quod, ex hypothese, non sit in ea circumferentia, ostendetur prorsus, ut in analysi, idem esse in circumferentia, quod est absurdum. Et hoc in aliis omnibus Locis observandum.

Idem aliter sine ope Lemmatis.

A punctis datis A, B, inflectantur inaequales AC, BC datam habentes rationem; ostendendum est punctum C tangere circumferentiam positione datam.

Ducatur a puncto C, ad ipsam AB productam, recta CD faciens
S 2 angulum

PROP. III.

Si fit recta positione data, et in ipsa datum sit punctum, unde ducatur quaedam recta terminata; ab hujus autem termino ducatur perpendicularis ad rectam positione datam: fit vero quadratum ex [primo] ducta aequale rectangulo contento data recta et intercepta vel inter perpendicularem et datum punctum, vel inter perpendicularem et aliud datum punctum in recta positione data: terminus ductae tanget circumferentiam positione datam.

Vel magis generaliter.

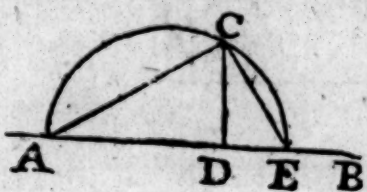
Si a dato puncto ducatur recta linea, ab ejus autem termino ducatur ad rectam positione datam, recta parallela positione datae rectae; fit vero quadratum ex primo ducta aequale rectangulo contento data recta, et segmento rectae positione datae, inter secundo ductam et datum punctum: tanget terminus primo ductae circumferentiam positione datam.

CAS. I. Quando recta positione data, ad quam ducenda est recta a termino primo ductae, transit per punctum datum a quo ducta est prima recta; et eidem dato puncto adjacet segmentum abscissum recta, quae ducta est a termino primo ductae.

Sit datum punctum A in recta AB positione data, et ducta AC, a termino ejus C ducatur ad AB recta CD parallela rectae positione datae;

ducendae sunt ad AB, et ad contrarias partes rectae AB ad quas est recta AF, super AE describatur [33. 3.] segmentum circuli quod capiat angulum aequalem ipsi EAF; idemque fiat ad alteram AE; erunt horum circumferentiae Locus quaesitus; hoc est, si ad quodvis in ipsis punctum C, ducatur a puncto A recta AC, et ad rectam AB ducatur a puncto C recta CD parallela ipsi AF, erit quadratum ex AC aequale rectangulo EAD. Quoniam enim angulus CDA aequalis est alterno DAF, hoc est, ipsi ACE, aequiangula erunt DAC, CAE triangula; quare est EA ad AC, ut AC ad AD, et propterea quadratum ex AC aequale est rectangulo EAD.

COR. Hinc si a puncto C ad rectam AE positione et magnitudine datam ducatur perpendicularis CD; fueritque quadratum ex CD aequale rectangulo ADE contento segmentis ipsius AE; tanget C circumferentiam circuli super diametrum AE descripti. Addendo enim utrinque quadratum ex AD,



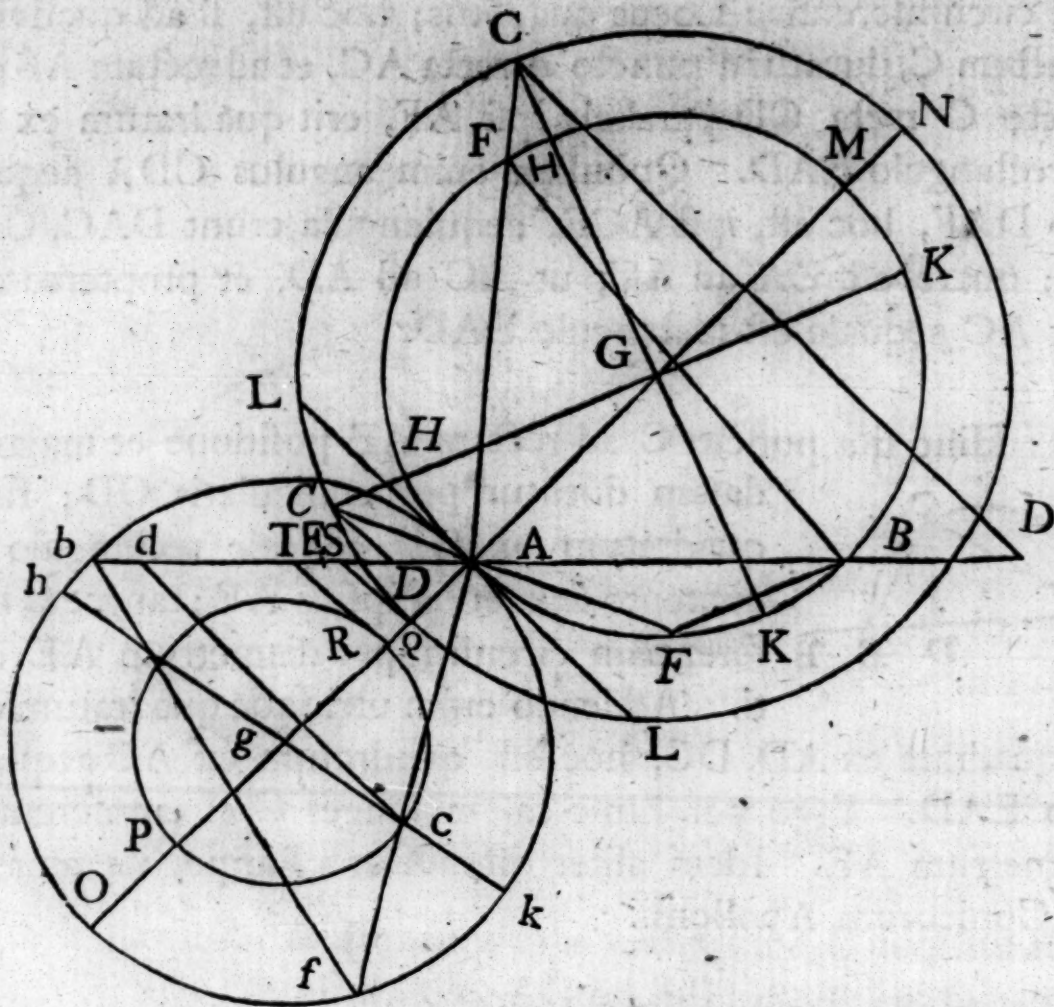
erunt quadrata ex AD, DC, hoc est, quadratum ex AC aequale rectangulo EAD. Ergo per hunc casum tanget C circumferentiam super diametrum AE. Idem aliter ostenditur a Pappo, Lemmate 2. in Lib. 1. Conicorum Apollonii.

CAS. 2. Quando recta positione data, ad quam ducenda est recta a termino primò ductae, transit, ut in praecedente casu, per punctum datum, a quo ducta est prima recta; aliud autem datum est punctum, cui adjacet segmentum abscissum rectâ parallelâ positione datae.

Sit AB recta positione data, et in ipsa data sint duo puncta A, E; a puncto autem A ducatur AC recta, et a termino ejus C, ad AB ducatur CD, parallela positione datae; fitque quadratum ex AC aequale rectangulo contento data recta AB, et segmento DE, inter CD et datum punctum E: tanget punctum C circumferentiam positione datam.

Primo,

Primo, Cadat punctum D in recta AE producta versus partes A. Quoniam igitur quadratum ex AC aequale, ex hypothese, est rectan-



gulo contento ipsis AB, DE, hoc est [1. 2.] rectangulis BAD, BAE; si ipsi BAD aequale fiat rectangulum CAF, erit, ablatis aequalibus rectangulis CAF, BAD, reliquum rectangulum [3. 2.] ACF aequale ipsi BAE. Datum est autem BAE, propter datas AB, AE; quare datum est rectangulum ACF. jungatur BF, et, propter aequalia rectangula BAD, CAF, erit BA ad AF, ut AC ad AD; quare [6. 6.] aequiangula sunt BAF, CAD triangu-
la; et angulus propterea AFB aequalis est dato angulo ADC; et dantur A, B puncta, ergo tangit punctum F circumferentiam positione datam, super AB descriptam;
per

per Prop. 2. Lib. 1. hujus. Describatur, sitque centrum ejus G , et CG jungatur, circulo in H , K occurrens. data igitur magnitudine est GH , et quadratum ex ipsa datum. datum etiam est rectangulum KCH , aequale sc. ipsi ACF [36. 3.] quod datum ostensum fuit. Quare quadratum ex GH una cum rectangulo KCH datum est, hoc est, quadratum ex GC [6. 2.] datum; quare data est recta GC ; sed et G punctum; tangit propterea punctum C circumferentiam positione datam, per Prop. 1. Lib. 1. huj.

Secundo, Ductis AC , CD , ut dictum fuit, cadat punctum D in ipsa recta AE ; et quoniam, ex hypothesi, quadratum ex AC aequale est rectangulo contento ipsis AB , DE , addito rectangulo BAD , erit quadratum ex AC una cum BAD rectangulo, aequale dato rectangulo BAE . producta autem CA ad F , ita ut rectangulum CAF aequale sit ipsi BAD , erit quadratum ex AC una cum rectangulo BAD aequale [3. 2.] rectangulo ACF ; quare datum est ACF . Juncta autem BF , ostendetur, ut in primo articulo hujus casus, angulum AFB aequalem esse dato angulo ADC : quare punctum F tangit circumferentiam in praecedente articulo descriptam, cujus centrum est G ; et, ut in eo articulo, ostendetur punctum C tangere circumferentiam ejusdem circuli quam ostensum fuit punctum C tangere.

Tertio, Ductis Ac , cd , ut dictum fuit, cadat punctum d in recta AE producta ad partes E , ponatur vero Ab aequalis ipsi AB ad contrarias partes puncti A . et quoniam, ex hypothesi, quadratum ex Ac aequale est rectangulo contento ipsis Ab , dE ; addito rectangulo BAE , erit quadratum ex Ac una cum BAE rectangulo, aequale rectangulo BAd ; huic aequale sit rectangulum CAf , producta sc. Ac ad f ; et quoniam quadratum ex Ac una cum rectangulo BAE , aequale est ipsi CAf , quibus commune est quadratum ex Ac ; erit reliquum BAE rectangulum aequale reliquo CAf , quod propterea datum erit. Jungatur bf , et propter aequalia rectangula BAd , CAf , aequiangula erunt triangu-
la Baf , CAf ; quare angulus Afb aequalis est dato angulo Adc ; et data sunt A , b puncta, ergo tangit

T

f cir-

auferatur ex quadrato quod fit ex kg , quod non semper fieri potest, ideo Locus in hoc articulo non semper construi potest; si vero acciderit datum rectangulum bAE aequale esse quadrato quod fit a kg seu Ag semidiametro sc. circuli cujus segmentum super datam rectam Ab capit angulum aequalem dato angulo Adc , unicum punctum g proposito satisfaciet. At si rectangulum bAE majus fuerit quadrato ex Ag , Locus nullibi inuenietur. Si igitur requiratur ut rectae cd parallelae positione datae, occurrant rectae AE productae ad partes E , necesse est ut rectangulum bAE minus sit quadrato ex Ag , his praemissis, Locus

Componetur ita.

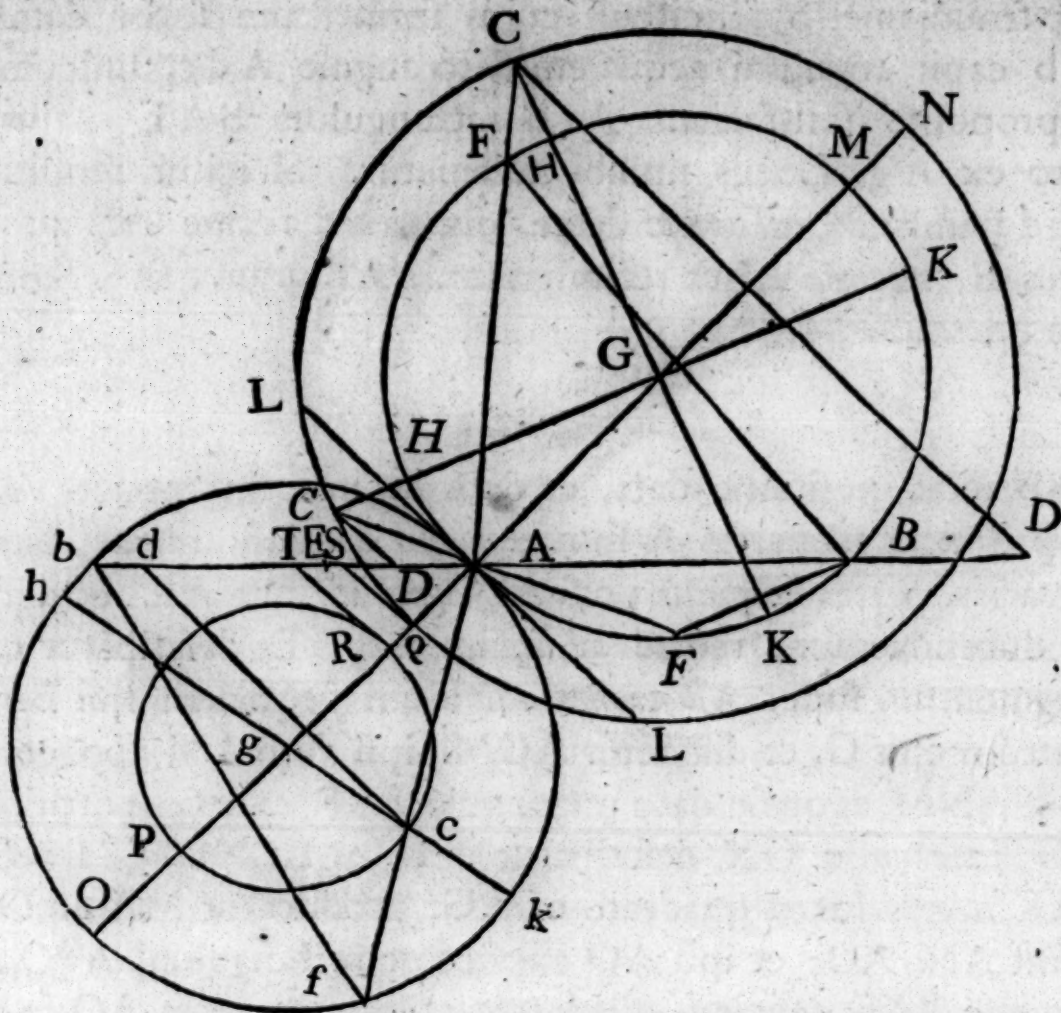
Sit AB recta positione data, et data in ipsa sint puncta A, E , et in EA producta ad partes A sumatur AB aequalis rectae datae, cui ad contrarias partes aequalis ponatur Ab , sit vero AL recta cui parallelae ducendae sunt rectae ad ipsam AB . Et describatur circulus cujus segmentum super AB capiat angulum aequalem ipsi BAL , sitque centrum ejus G , et diameter AGM . ipsi vero AM applicetur rectangulum ANM , aequale dato rectangulo BAE , excedens quadrato. et, centro G , intervallo GN , describatur circulus LCN . Et si rectangulum BAE minus fuerit quadrato ex AG , producat MA ad O ut aequales sint AM, AO ; et ipsi AO applicetur rectangulum APO , aequale rectangulo BAE deficiens quadrato, et bifariam secta AO in g , centro g et intervallo gP describatur circulus cP . erunt horum circumferentiae Locus quaesitus, hoc est, si ad quodvis in ipsis punctum C ducatur a puncto A recta AC , et a puncto C ad AB ducatur CD parallela ipsi AL ; erit quadratum ex AC aequale rectangulo contento data recta AB , et segmento DE inter D , et datum punctum E .

Primum vero ostendendum est punctum E esse inter rectas QS, RT quae circulos contingunt in punctis Q, R , quibus recta Gg ipsis occurrit. Jungi intelligantur BM et bo , et quoniam aequales sunt anguli AQS, ABM , uterque enim est rectus [18. et 31. 3.], aequiangula erunt triangula AQS, ABM ; quare rectangulum BAS aequale est

T 2

ipsi

ipsi MAQ seu AMN. rectangulum autem BAE seu ANM majus est ipso AMN, ergo BAE majus est ipso BAS, et recta AE major AS.

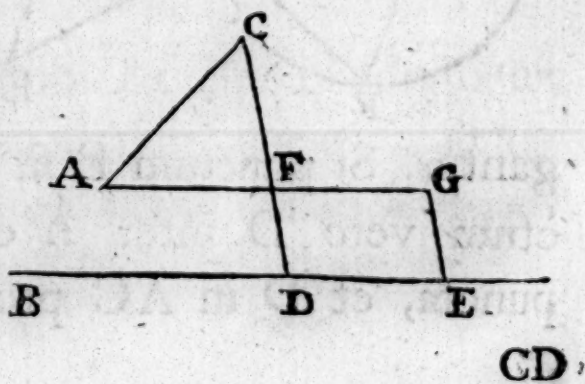


Similiter ostendetur rectangulum BAT aequale ipsi MAR, seu AOP; est autem BAE, seu APO, minus AOP seu BAT. ergo AE minor est AT, et propterea punctum E est inter S et T. Quoniam vero angulus BAL aequalis est ipsi AMB in segmento alterno, contingit AL circum ABM [conv. 32. 3.], quare parallelae sunt AL, QS, RT. quaevis igitur recta a puncto in circulo LN ducta parallela ipsi AL, hoc est contingenti QS, necessario occurret vel rectae EA, vel ipsi ad partes A productae. quaevis autem a puncto in circulo PR ducta eidem AL, hoc est ipsi RT parallela occurret rectae AT productae
versus

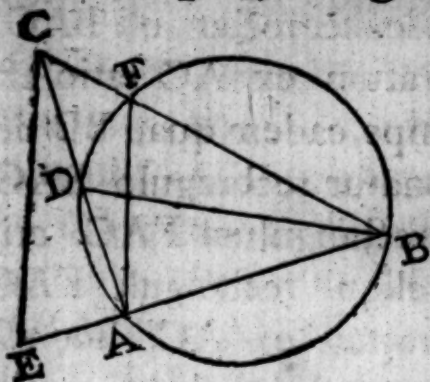
versus T. Sumatur igitur punctum quodvis C in circulo LN, a quo ducta CD, ipsi AL parallela, occurrat, primo, rectae EA productae versus partes A, et ducta AC, occurrat circulo BKM in F et BF jungatur. ex constructione igitur est angulus AFB aequalis angulo BAL, hoc est alterno ADC, quare aequiangula sunt AFB, ADC triangu-
la et propterea rectangulum CAF aequale est ipsi BAD. Est autem, ducta sc. CHGK, rectangulum ACF aequale (ipsi KCH, hoc est, ipsi ANM, hoc est, ex constructione) ipsi BAE. rectangulum igitur CAF simul cum ipso ACF, hoc est quadratum ex AC aequale est rectangulis BAD, BAE, hoc est contento ipsis AB, DE. Secundo, Ductis AC, CD, ut prius. Occurrat CD ipsi AE, et iisdem construc-
tis ostendetur rectangulum CAF aequale ipsi BAD, rectangulum au-
tem ACF aequale ipsi BAE; ergo reliquum sc. quadratum ex AC aequale est reliquo rectangulo contento ipsis AB, DE. Tertio, Du-
catur A c ad punctum quodvis c in circulo PR, et c d ducatur paral-
lela ipsi AL; occurret igitur c d rectae AT productae ad partes T, quoniam sc. RT contingit circulum; iisdemque constructis, ostendetur, ut prius, rectangulum b A d aequale ipsi c A f, hoc est quadrato ex A c et A c f rectangulo simul. est autem A c f aequale (ipsi k c h, hoc est ipsi APO, hoc est, ex constructione) ipsi b A E; est igitur rectangu-
lum b A d, aequale quadrato ex A c et rectangulo b A E simul, et ab-
lato communi b A E, erit rectangulum contentum ipsis b A, d E aequa-
le quadrato ex A c.

CAS. 3. Quando recta positione data ad quam ducenda est recta a termino primò ductae, non transit per punctum a quo ducta est prima recta.

Datum sit punctum A, et recta BE positione in qua datum est punctum E, et ducta AC, a termino ejus C ducatur ad EB recta CD, rectae positione datae parallela; sit autem quadratum ex AC, aequale rectangulo contento data recta EB, et segmento DE inter



BDC aequalis angulo **BCE**. Si vero punctum **E** fuerit in **AB** producta ad partes **A**, et **D** inter **A**, **C** puncta; erit angulus **BDA**, qui sc. deinceps est ipsi **BDC**, aequalis angulo **BCE**. et contra, si anguli fuerint aequales, erit rectangulum **ACD** ad quadratum ex **BC**, ut **AE** ad **EB**.



Ducatur enim per **A** recta ipsi **CE** parallela, occurratque **CB** in **F**; et quoniam rectangulum **ACD** est ad quadratum ex **BC**, ut (**AE** ad **EB**, hoc est, propter parallelas, ut **FC** ad **CB**, hoc est, ut) **FCB** rectangulum ad quadratum ex **BC**; erit rectangulum **ACD** aequale rectangulo **FCB**. Ergo in circulo sunt **A**, **D**, **B**, **F** puncta, et angulus **BDC** in casu primo et secundo aequalis erit ipsi **AFB**, hoc est angulo **BCE**. at in casu tertio angulus **ADB** aequalis erit ipsi **AFB**, hoc est angulo **BCE**.

Et contra, si angulus **BDC**, vel in tertio casu, angulus **ADB** aequalis fuerit ipsi **BCE**, hoc est angulo **AFB**; erunt puncta **A**, **D**, **B**, **F** in circulo, et propterea rectangulum **ACD** aequale ipsi **FCB**. et est **FCB** ad quadratum ex **BC**, ut **FC** ad **CB**, hoc est, ut **AE** ad **EB**.

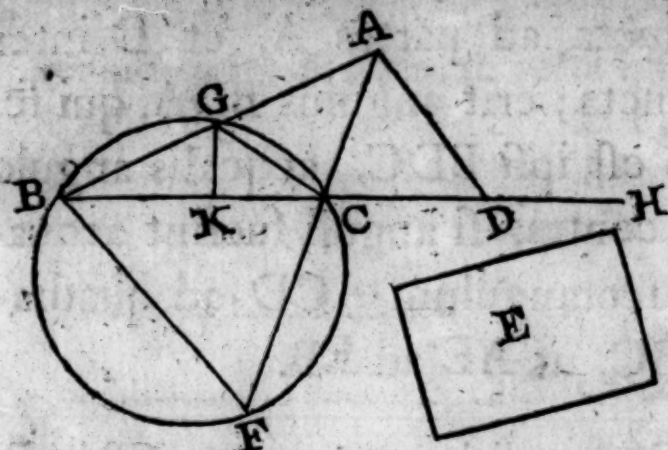
LEMMA IV.

Lemma hoc est Propositio cxxi lib. septimi Pappi Alexandrini et ipsius Lemma 3. in librum secundum Apollonii.

Sit triangulum **ABC**, et quadratum ex **BA** quadrato ex **AC** sit dato majus, quam in ratione. datum autem **E**. et ratio sit **BD** ad **DC**. Dico rectangulum **DBC** spatio **E** majus esse.

Auferatur

Auferatur enim datum spatium, quod sit *ABG rectangulum*: reliqui

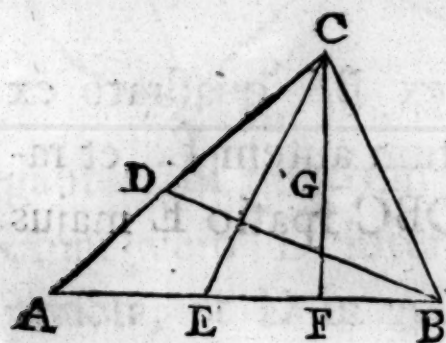


igitur, videlicet *rectanguli BAG*, ad quadratum ex *AC* ratio est data, nempe eadem quae *BD* ad *DC*. ponatur *rectangulo BAG* aequale *rectangulum FAC*. erit rursus reliqui *rectanguli FAC* ad quadratum ex *AC*, hoc est *rectae lineae FA* ad *AC*, ratio eadem quae *BD* ad *DC*. ergo

AD ipsi *BF* est parallela; et idcirco *angulus F* est aequalis *angulo CAD*. sed *angulus F* aequalis est *angulo AGC*, quoniam *puncta B, G, C, F* sunt in circulo. quare *angulus AGC* *angulo CAD* est aequalis. atque est *angulus ADH* major *angulo CAD*. *angulus igitur ADH* est major *angulo AGC*. ducta igitur *GK* quae faciat *angulum AGK* aequalem ipsi *ADH* erunt *puncta A, G, K, D* in circulo. ergo *rectangulum DBC*, quod majus est *DBK*, hoc est, *rectangulo ABG*, dato spatio *E* majus erit.

PROP. IV.

Si a duobus punctis datis inflectantur [duae] rectae, et sit quadratum unius quadrato alterius dato, majus quam in ratione; tanget punctum [occursus] rectam lineam aut circumferentiam positione datam.

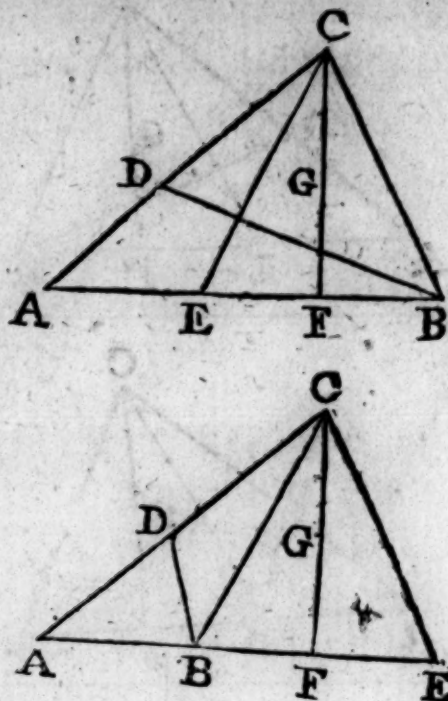


CAS. I. Quando ratio data est aequalis ad aequale.

Sint *A, B* data puncta, et inflectantur *AC, BC*; sit autem quadratum ex *AC* majus quadrato ex *BC* dato, quam in ratione aequalis ad aequale; tanget punctum *C* rectam lineam positione datam.

Quoniam

Quoniam quadratum ex AC majus est quadrato ex BC, dato, quam in ratione aequalitatis; auferatur datum spatium sc. rectangulum CAD, et [def. 11. dat.] reliquum rectangulum ACD, aequale erit quadrato ex BC. quare est AC ad CB, ut CB ad CD, angulusque ABC aequalis erit [6. 6.] angulo BDC. sit rectangulum BAE aequale dato spatio CAD, et propter datam AB dabitur AE, et punctum E, puncta vero B, C, D, E, erunt in circulo. angulus igitur BEC, vel qui ipsi est deinceps, aequalis est angulo BDC [21. aut 22. 3.] hoc est angulo ABC. quare aequales sunt rectae BC, EC, et dantur B, E puncta; ergo tangit punctum C rectam positione datam, quae sc. bifariam, et ad rectos angulos, secat ipsam BE; per cas. 1. Prop 2. Lib. 2. hujus.



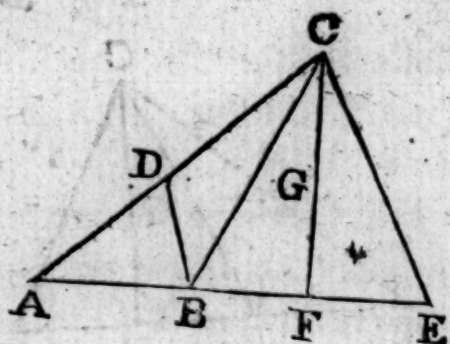
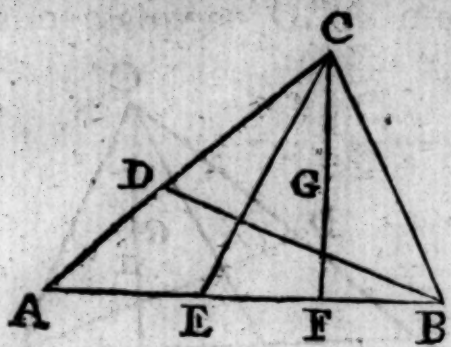
Componetur vero ita.

Sit datum spatium aequale rectangulo BAE, et bifariam secta BE in F, ad rectos angulos eidem ducatur FG. Erit haec Locus quaesitus, hoc est, si a punctis A, B inflectantur ad FG quaecumque rectae AC, BC, erit quadratum ex AC majus quadrato ex BC, dato rectangulo BAE. Quoniam enim quadratum ex AC majus est quadrato ex AF, idem multo magis rectangulo BAE majus erit [6. 2.]. applicato igitur, ad AC, rectangulo CAD aequali ipsi BAE, cadet punctum D inter A et C. ablato autem rectangulo CAD, ex quadrato quod fit ab AC, reliquum rectangulum ACD, quadrato ex BC aequale ostendendum est. Jungantur BD, CE; et propter aequalia rectangula BAE, CAD, in circulo erunt B, D, C, E puncta; igitur angulus BDC aequalis est (angulo BEC, vel ei qui ipsi deinceps est, hoc est, propter aequales CB, CE) angulo CBA. quare aequiangula sunt ABC, BDC triangu- la, et propterea rectangulum ACD aequale est quadrato ex BC.

U

Locus

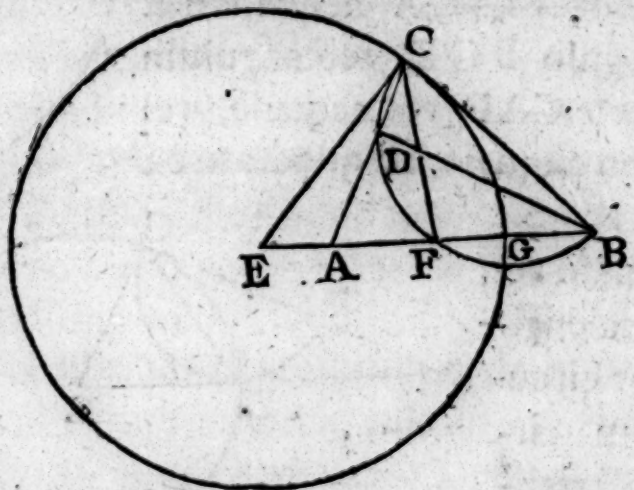
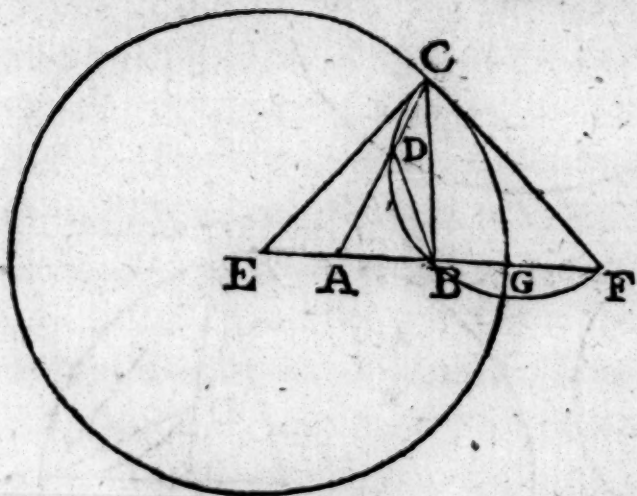
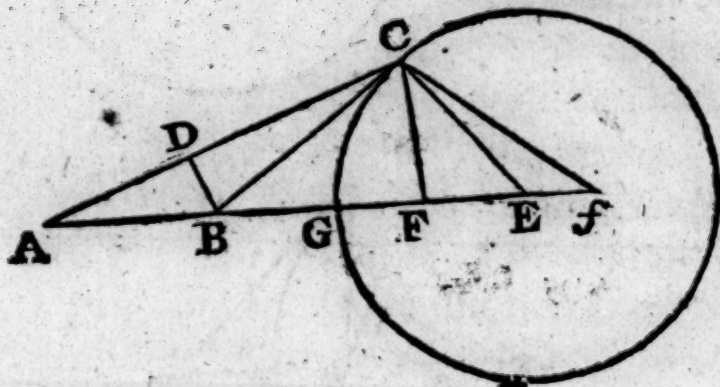
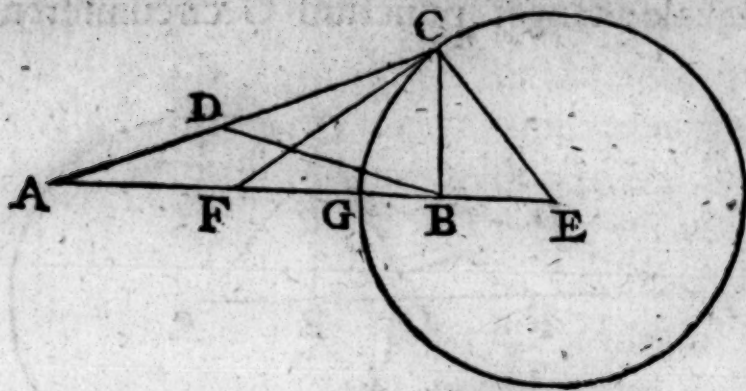
Locus autem in hoc casu idem prorsus est cum Loco in Prop. 1. Lib. hujus 2. addita autem fuit haec solutio propter similitudinem



ejus cum solutione casus sequentis. et quidem verosimile est casum hunc a junioribus a sequente casu 2. separatum fuisse, et ut Locum primum Libri hujus 2. positum, cum apud veteres is, qui nunc secundus Locus numeratur, fuerat primus, ut patet ex Prop. 119. Lib. 7. Pappi Alexandrini, cui haec praemittuntur, viz. "Locorum Planorum Liber secundus. In primum Locum secundi Libri." Manifestum autem est Propositionem hanc 119. Lemma esse in Locum qui apud Pappum, in praefatione ad Librum suum septimum, secundus habetur. Sequenti propositioni 120^{mae} praefigitur hic Titulus "In Locum secun-

"dum." et hanc sequenti praefigitur "In eundem si non fuerit proportio aequalis ad aequale." Propositio autem 120^{ma}, Lemma est in Locum qui, apud Pappum, primus hujus Libri secundi dicitur, altera vero, 121^{ma}, solo Loco qui, apud Pappum in praedicta praefatione, 4^{tus} numeratur, convenire potest. Manifestum propterea est Locum secundum apud Veteres conflatum fuisse ex iis qui nunc in prima et quarta, secundum Pappi numerationem, habentur. Adde, Apollonium, postquam contemplatus fuerat Locum concursus rectarum, a duobus datis punctis inflexarum quae, et propterea quadrata ex ipsis, datam habent rationem; recte huic subjunxisse Locum concursus rectarum a datis duobus punctis, quarum ex una quadratum majus est quadrato ex altera dato, quam in ratione. Lemma autem apud Pappum quartum, sine dubio, Loco suo excidit, quintum enim et sextum inservire huic praesenti Loco, cui inserviunt secundum et tertium, ex sequentibus in hac Propositione perspicue videbitur. Locus autem qui nunc 5^{tus} est, apud veteres tertius fuisse videtur, et qui nunc tertius, apud veteres quartus

vel ei qui ipsi deinceps est, angulo sc. BDA [22. 3.] hoc est, in utroque casu, angulo BCE. aequalis igitur est EC, datae magnitudine rectae EB; et datum est E punctum; ergo tangit punctum C circumferentiam positione datam, per Prop. 1. Lib. 1. hujus.



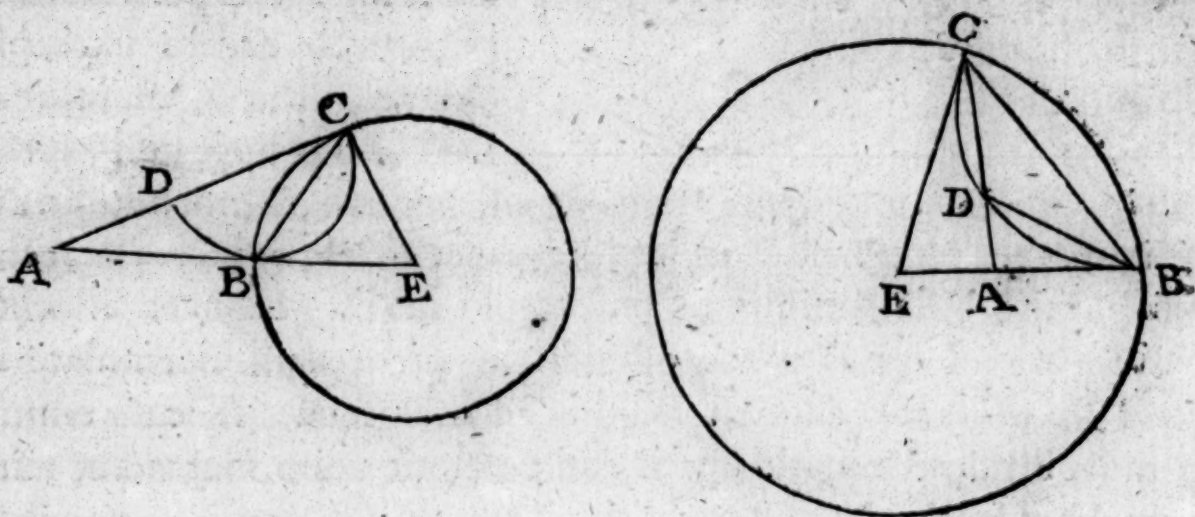
Secundo, Sit rectangulum CAD majus aut minus quadrato ex AB, ipsique aequale sit rectangulum BAF, et propter datam AB, dabitur AF et punctum F. puncta autem B, F, D, C sunt in circulo, quia aequalia sunt rectangula praedicta; quare, junctâ CF, aequalis erit angulus EFC angulo BDC, vel angulo BDA, hoc est, in utroque casu, angulo BCE. aequiangula propterea sunt

triangula FEC, CEB; ergo quadratum ex EC aequale est rectangulo FEB. datum autem est FEB, quare datum est quadratum ex EC, et ipsa EC magnitudine dabitur; et datum est punctum E; ergo tangit punctum C circumferentiam positione datam, per Prop. 1. Lib. 1. huj.

Componetur

Componetur vero ita.

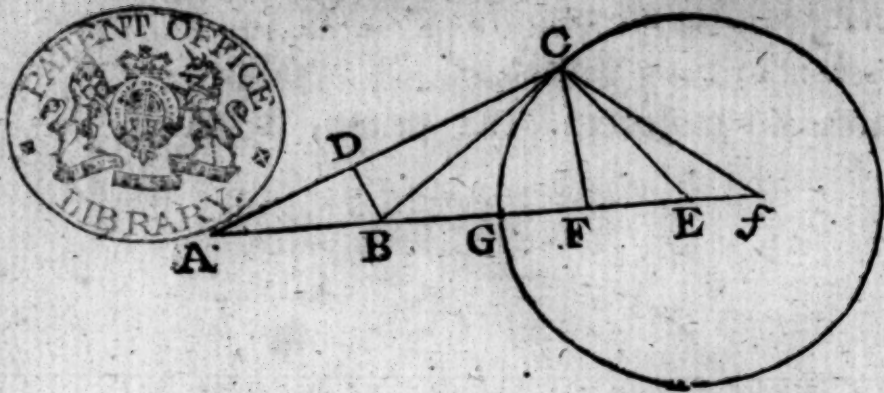
Sit rectangulum BAF aequale spatio dato, et ratio AE ad EB aequalis rationi datae, quae si fuerit majoris ad minorem, cadet punctum E in AB producta ad partes B; in eadem vero ad partes contrarias productâ, si fuerit ratio minoris ad majorem. Et primo, si spa-



tium datum aequale sit quadrato ex AB, hoc est, si punctum F cadat in B; centro E, intervallo EB, describatur circulus; erit hujus circumferentia Locus quaesitus; hoc est, si a punctis A, B ad quodvis in ipsa punctum inflectantur AC, BC, erit quadratum ex AC majus quadrato ex BC, dato quadrato ex AB, quam in ratione AE ad EB. jungatur enim EC, et quoniam AC major est AB [8. aut 7. 3.]; si quadrato ex AB, aequale fiat rectangulum CAD, cadet punctum D inter A et C. junctâ autem BD, recta AB circulum, circa triangulum BDC descriptum, continget in B [37. 3.]. ergo angulus BDC, vel, qui ipsi est deinceps, BDA aequalis est angulo EBC [32. 3.], hoc est, ipsi ECB. quare per Lemm. 3. rectangulum ACD, hoc est, excessus quadrati ex AC supra datum rectangulum CAD, est ad quadratum ex BC ut recta AE ad ipsam BE.

Sit jam rectangulum BAF, seu spatium datum, majus aut minus quadrato ex AB. Quoniam vero requiritur ut puncta B, D, C, F sint in:

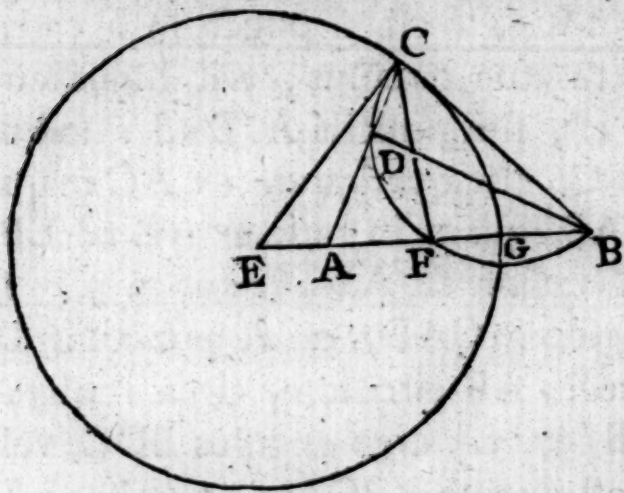
in circulo, et ita quidem ut angulus EFC inde ostendatur aequalis BDC , quod sc. vel sint in eodem segmento, vel alter eorum oppositus



sit alteri exteriori in quadrilatero; quod fieri non potest in casu quo ratio data est majoris ad minorem, nisi punctum F cadat inter A, E puncta. nam si ponatur F cadere ultra punctum E , ut in f , essent anguli Efc, BDC oppositi in quadri-

latero in circulo, unde ipsos aequales esse minime ostendi poterit. necesse igitur est punctum F cadat inter A , et E , et propterea ut rectangulum datum BAF , minus sit rectangulo BAE . Et haec est determinatio quam Pappus aliter ostendit in praecedente Lemmate 4^{to}, in casu sc. quo ratio data est majoris ad minorem. In casu enim altero nulla est determinatio spatii dati; poterit enim majus aut minus esse quolibet spatium dato.

Sit igitur rectangulum datum BAF in praedicto casu minus rectan-



gulo BAE , et inter EB, EF inventa media proportionali EG , centroque E , intervallo EG , descritto circulo, erit circumferentia ejus Locus quaesitus; hoc est, si a punctis A, B ad quodvis in ipsa punctum inflectantur AC, BC , erit quadratum ex AC majus quadrato ex BC , dato rectangulo BAF , quam in ratione AE ad EB . jungan-

tur enim EC et FC , et quoniam ex constructione rectangulum BEF aequale est quadrato ex EG , hoc est ex EC ; recta EC continget in C circulum circa triangulum BCF descriptum [37. 3.]. et quoniam est punctum A extra hunc circulum ad easdem partes contingentis EC , ad quas est circulus, necesse est ut recta AC eidem rursus occurrat inter

ter A et C puncta [16. 3.]. Occurrat ei in D, et jungatur BD. rectangulum igitur CAD aequale est ipsi BAF; ablato autem CAD, ex quadrato quod fit ab AC, reliquum est rectangulum ACD. et quoniam B, C, D, F puncta sunt in circulo, angulus BDC, vel, qui ipsi est deinceps, angulus BDA aequalis est ipsi EFC, hoc est, propter aequiangula triangula BEC, CEF, [6. 6.] angulo BCE, ergo per Lemm. 3. rectangulum ACD est ad quadratum ex BC, ut AE ad EB. et est ACD excessus quadrati ex AC supra spatium datum rectangulum sc. BAF.

Restat autem idem ostendere de punctis in quibus Locus occurrit rectae AB. hoc est, si AE ad EB sit ratio data, et BAF rectangulum sit spatium da-

tum, et EG me-

dia proportiona-

lis inter EB, EF;

ostendendum est

quadratum ex

AG majus esse

quadrato ex BG,

quam in ratione

AE ad EB, rec-

tangulo BAF;

hoc est, excessum

quadrati ex AG

supra BAF rec-

tangulum esse ad

quadratum ex

BG, ut AE ad

EB. fiat GH aequalis ipsi GB, et quoniam proportionales sunt FE,

GE, BE erit (in fig. 1. 5. per 19. 5. et dividendo. in fig. 2. 6. per 19. 5.

et dividendo inverse (a). At in fig. 3. 4. 7. 8. per 12. 5. et componendo.)

(a) hoc est quando infertur, ut excessus 2dae supra primam ad 2dam, ita excessus 4tae supra

3tiam ad quartam.

1 A F H G B E

2 A F B E G H

3 A B G F E H

4 A B F E G H

5 E A B G H F

6 H E A F G B

7 H G E A B F

8 H G E A F B

FH

FH ad BG, ut BG ad BE. quadratum igitur ex BG aequale est rectangulo contento BE, FH. et propter aequales BG, GH, erit in fig. 1, 2, 3, 4 quadratum ex AG aequale (rectangulo BAH una cum quadrato ex BG [6. 2.], hoc est rectangulo BAF; contento BA, FH; et contento BE, FH; hoc est) rectangulo BAF, et ei quod AE, FH

1 $\overline{A \quad F \quad H \quad G \quad B \quad E}$

2 $\overline{A \quad F \quad B \quad E \quad G \quad H}$

3 $\overline{A \quad B \quad G \quad F \quad E \quad H}$

4 $\overline{A \quad B \quad F \quad E \quad G \quad H}$

5 $\overline{E \quad A \quad B \quad G \quad H \quad F}$

6 $\overline{H \quad E \quad A \quad F \quad G \quad B}$

7 $\overline{H \quad G \quad E \quad A \quad B \quad F}$

8 $\overline{H \quad G \quad E \quad A \quad F \quad B}$

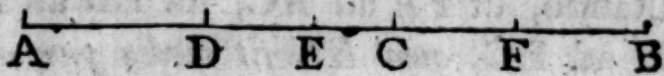
continetur. at in 5, 6, 7, 8, quoniam quadratum ex BG aequale est rectangulo (contento BE, FH, hoc est, per 1. 2.) contento EA, FH, simul cum contento, AB, FH; si in 5 addatur rectangulum BAH, et in 6, 7, 8 idem auferatur utrinque, erit [6, 5. 2.] quadratum ex AG aequale rectangulo BAF una cum contento AE, FH. est igitur rectangulum AE, FH, excessus quadrati ex AG, supra rectangulum BAF. et est rectangulum AE, FH ad quadratum ex BG, hoc est ad rectangulum EB, FH, ut AE ad EB, quod erat ostendendum.

Pappus Alexandrinus eadem in duobus casibus fig. 1 et 3. demonstrat, viz. in Propositionibus cxxiii, cxxiv Lib. 7. quas, ut nihil omitamus eorum quibus elegantissimus Geometra Libros hos illustravit, hic adjiciemus; ut simul quo spectabant, cuique Propositioni interviebant Lemmata haec, quae Geometras a Pappi tempore, ut videtur, latuere, plene intelligatur.

Prop.

*Prop. cxxiii. Lib 7. Collectionum Mathem. Pappi Alexandrini fol. 235.
edit. 1588. quaeque debet esse ipsius Lemma 4^{um}, non 5^{um}, ut apud
Commandinum habetur.*

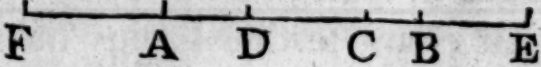
Proportione existente AB ad BC, et spatio CA, AD contento; si ipsarum DB, BC media proportionalis BE sumpta fuerit; ostendendum est quadratum ex AE quadrato ex EC majus esse, quam in proportione AB ad BC, rectangulo CAD.



Fiat enim ut AB ad BC, ita alia quaequam FE, ad EC. ob proportionem igitur et dividendo, ut AC ad CB, ita est FC ad CE. quare et tota AF ad totam BE, est ut AC ad CB, et permutando, ut FA ad AC, ita EB ad BC. ut autem EB ad BC, ita DE ad EC, quod BE sit media proportionalis. ut igitur FA ad AC, ita est DE ad EC, et spatium spatio aequale. ergo quod continetur AF, EC, aequale est contento AC, DE. sed quod AF, EC, continetur, excedit rectangulum AEC rectangulo FEC; et quo rectangulum AF, EC excedit rectangulum AEC, eo et rectangulum AC, DE idem rectangulum excedit. rectangulum igitur AC, DE majus est quam rectangulum AEC, rectangulo FEC. sed quo rectangulum AC, DE excedit rectangulum AEC, eo et quadratum ex AE rectangulum CAD excedit (a). ergo quadratum ex AE majus est quam rectangulum CAD, rectangulo FEC. rectangulum autem FEC ad quadratum ex EC eandem proportionem habet quam AB ad BC. quadratum igitur ex AE quadrato ex EC majus est quam in proportione AB ad BC, rectangulo CAD.

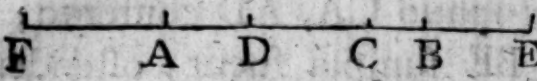
*Prop. cxxiv. Lib. 7. Pappi Alexandrini et ipsius Lem. 5^{um}, non 6^{um},
ut apud Commandinum.*

Sit proportio AB ad BC, spatium vero contentum CAD. si ipsarum DB, BC, media proportionalis sumatur BE. dico quadratum ex AE



(a) Est enim rectangulum contentum AC, DE, una cum ipso CAD aequale (rectangulo CAE, hoc est) quadrato ex AE una cum rectangulo AEC.

quadrato ex EC majus esse, quam in proportione AB ad BC, rectangulo CAD.

Fiat enim ut AB ad BC, ita alia quaedam FE ad EC, dividendo
 igitur, et reliqua ad reliquam, est ut
 FA ad BE, ita AC ad CB. et permutando, ut FA ad AC, ita EB ad BC. Ut autem EB ad BC, ita DE ad EC, *quod BE sit media proportionalis.* ergo et ut FA ad AC ita DE ad EC; et spatium spatio aequale. quod igitur FA, CE continetur aequale est contento AC, DE. commune apponatur rectangulum AEC una cum rectangulo CAD, quare totum, viz. quadratum ex AE, est aequale toti, rectangulo FEC una cum CAD. quadratum igitur ex AE quadrato ex EC majus est, quam in proportione AB ad BC, rectangulo CAD. etenim FEC rectangulum ad quadratum ex EC eandem proportionem habet.

Clarissimus Fermatius * existimat Pappum hoc loco omisisse propositionem praecedenti similem viz.

St a duobus punctis datis inflectantur duae rectae, et sit quadratum unius quadrato alterius dato minus, quam in ratione: tanget punctum *occurfus* circumferentiam positione datam.

Probe autem sciebat Apollonius Locum hunc omnino in praecedenti contineri. Si enim magnitudo, altera minor sit data, quam in ratione; et vicissim haec major erit illa data quam in ratione; ut ostensum fuit in Prop. 24. Lib. 1. hujus. et propter hanc rationem Euclides, qui in Libro Datorum propositiones plures tradit, de magnitudinibus quae aliis majores sunt data, quam in ratione, nullas tamen adfert de iis quae aliis minores sunt data quam in ratione, quoniam sc. in istis continentur. Potest vero et Propositio haec, omnino ad modum praecedentis, sine ope hujus Lemmatis demonstrari, ut Fermatius in loco citato ostendit.

Est etiam tertius Locus hifce similis, similemque resolutionem habens, cujus neque Fermatius neque Schootenius meminit, pariter cum illis utilis; ad neutram tamen illorum deduci potest. sc.

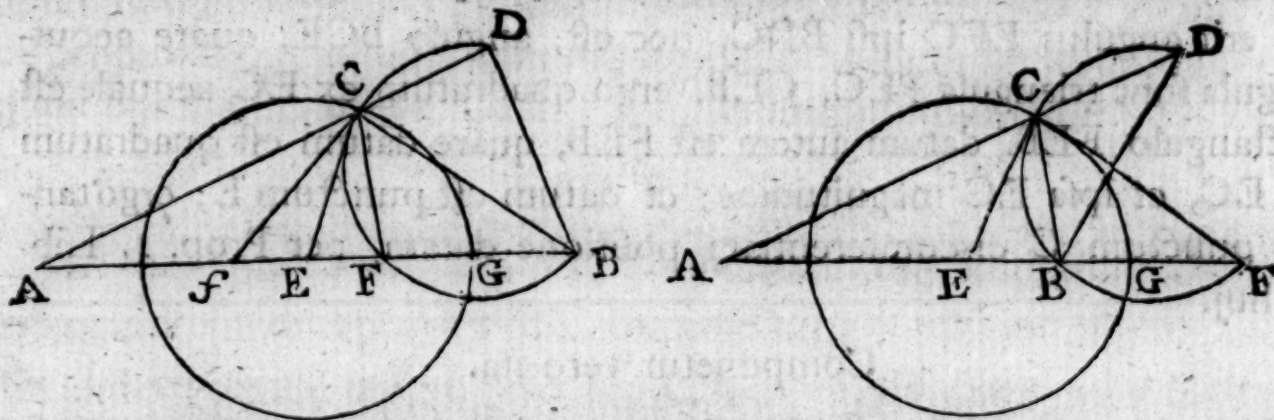
* Fermatii varia opera Mat. p. 33.

PROP. A.

Si a duobus punctis datis inflectantur duae rectae, et datum sit quadratum unius, simul cum eo ad quod quadratum alterius datam habet rationem. tanget punctum concursus circumferentiam positione datam.

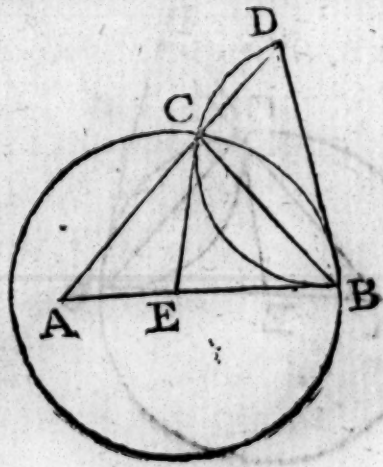
Sint A, B puncta data, et inflectantur AC, BC, datumque sit quadratum ex AC, simul cum eo ad quod quadratum ex BC datam habet rationem: tanget punctum C circumferentiam positione datam.

Sit enim spatium datum aequale rectangulo CAD, hoc est, quadrato ex AC, et rectangulo ACD. ergo, ex hypothesi, datur ratio ipsius ACD ad quadratum ex BC. Secetur AB in E, ut in hac ratione sit AE ad EB; et propter datam positione et magnitudine AB,



dabitur AE et punctum E. Junctis vero BD, CE, erit, per Lem. 3. angulus BDC aequalis ipsi BCE. rectangulum vero CAD vel aequale, vel non aequale est quadrato ex AB.

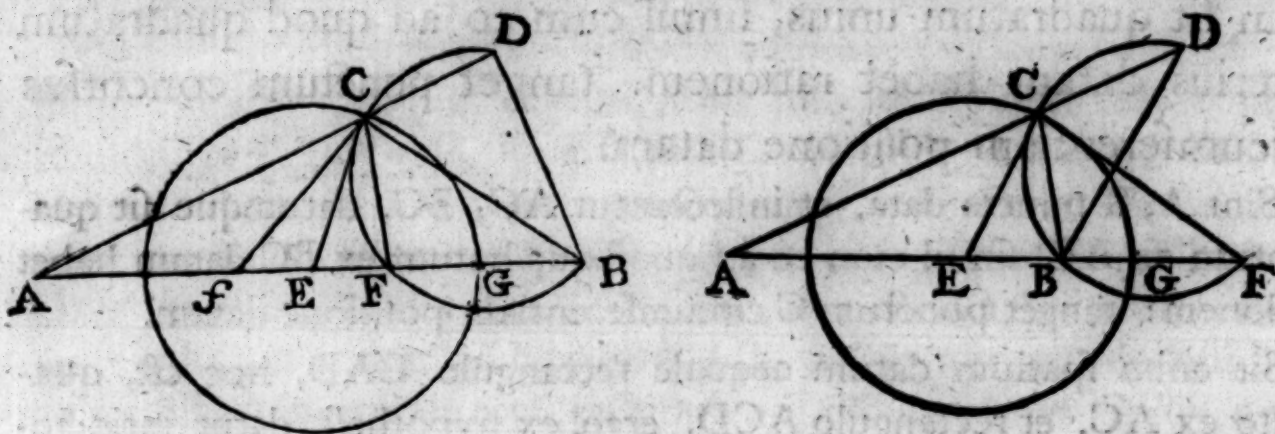
Sit primo aequale, igitur circulum circa triangulum BDC descriptum continget recta AB in B [37. 3.], quare angulus EBC aequalis erit angulo BDC [22. 3.], hoc est, angulo BCE. aequalis igitur est EC ipsi EB. data autem est EB, punctumque E datum est; ergo tangit punctum C circumferentiam positione datam, per Prop. 1. Lib. 1. hujus.



X 2

Secundo,

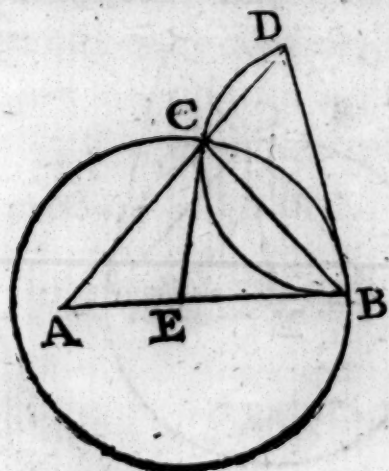
Secundo, sit rectangulum CAD majus aut minus quadrato ex AB, ipsique aequale sit rectangulum BAF, et propter datam AB, dabitur



AF, et punctum F. quoniam vero aequalia sunt rectangula BAF, CAD, in circulo erunt puncta B, F, D, C. Junctâ igitur CF, aequalis erit angulus EFC ipsi BDC, hoc est, angulo BCE, quare aequiangula sunt triacula FEC, CEB. ergo quadratum ex EC aequale est rectangulo FEB. datum autem est FEB, quare datum est quadratum ex EC, et ipsa EC magnitudine; et datum est punctum E; ergo tangit punctum C circumferentiam positione datam, per Prop. 1. Lib. 1. huj.

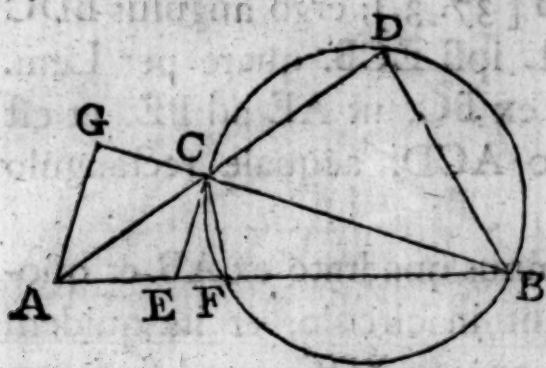
Componetur vero ita.

Sit rectangulum BAF aequale spatio dato, et ratio AE ad EB eadem rationi datae. et primo, si spatium datum aequale sit quadrato ex AB, hoc est, si punctum F cadat in B; centro E, intervallo EB, describatur



circulus, erit hujus circumferentia Locus quaesitus, hoc est, si a punctis A, B, ad quodvis in ipsa punctum inflectantur AC, BC, erit quadratum ex AC, simul cum eo ad quod quadratum ex BC datam habet rationem AE ad EB, aequale quadrato ex AB. Jungatur enim EC, et quoniam AC minor est AB [7. aut 8. 3.], si quadrato ex AB,

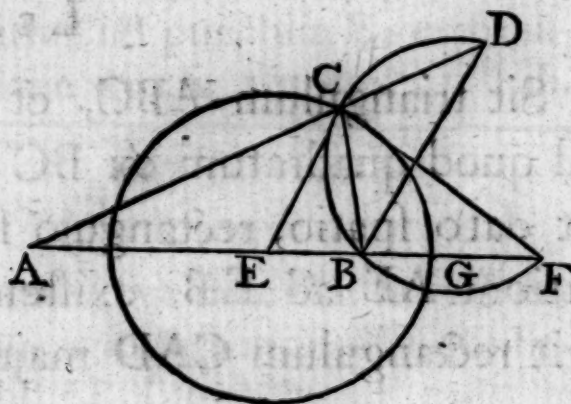
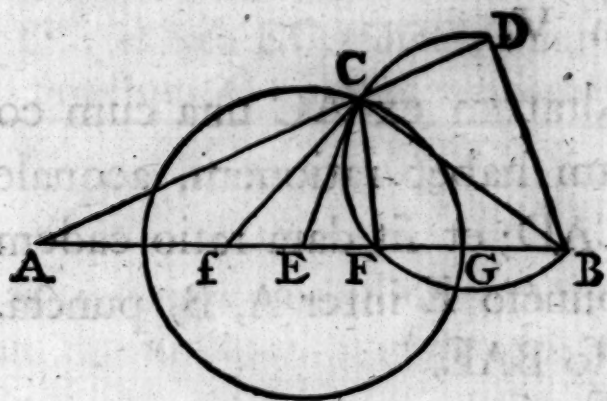
BCG rectangulum ad quadratum ex BC, ut GC ad CB. ut igitur GC ad CB, ita AE ad EB; quare juncta AG parallela est junctae



CE; angulusque ECB aequalis erit ipsi AGB, hoc est ipsi ADB; puncta enim A, G, D, B, sunt in circulo propter aequalia rectangula ACD, GCB. et quoniam CAD, BAF rectangula sunt inter se aequalia, erunt B, F, C, D puncta in circulo. angulus igitur ACF aequalis est ipsi FBD; major autem est

FBD angulo CBD, hoc est angulo GAD, hoc est ipso ACE. quare angulus ACF major est angulo ACE, et AF propterea major est ipsa AE. ergo rectangulum BAF, seu CAD, majus est ipso BAE.

Sit igitur spatium datum, rectangulum sc. BAF, majus ipso BAE, et inter EB, EF media proportionalis inveniatur EG. centro E, in-



tervallo EG, descripto circulo, erit hujus circumferentia Locus quaesitus; hoc est, si a punctis A, B ad quodvis in ipsa punctum C, inflectantur AC, BC; erit quadratum ex AC, simul cum eo ad quod quadratum ex BC datam habet rationem AE ad EB, aequale dato rectangulo BAF. Jungantur enim EC, FC; et quoniam ex constructione rectangulum BEF aequale est quadrato ex EG, hoc est, ex EC, recta EC continget circulum circa triangulum BCF descriptum [37. 3.]. est autem punctum A extra circulum ad partes contingentis EC, contrarias

contrarias iis ad quas est circulus, quare recta AC eidem occurreret in puncto aliquo in AC producta versus partes C. occurrat ei in D, et BD jungatur, rectangulum igitur CAD aequale est ipsi BAF. est autem CAD aequale quadrato ex CA, et rectangulo ACD simul. Ostendendum igitur est esse rectangulum ACD ad quadratum ex BC, ut AE ad EB; quod quidem ita se habet, quoniam enim in circulo sunt B, D, C, F puncta, est angulus BDC aequalis (ipsi EFC, hoc est, propter aequiangula triangula BEC, CEF,) angulo BCE. ergo, per Lemm. 3. est rectangulum ACD ad quadratum ex BC, ut AE ad EB.

Restat autem idem ostendere de punctis in quibus Locus occurrit rectae AB. hoc est, si AE ad EB

fit ratio data, et BAF rectangulum sit spatium datum, et EG media proportionalis inter EB, EF; ostendendum est illud quod una cum quadrato ex AG aequale est rectangulo BAF, habere ad quadratum ex GB eandem rationem quam habet AE ad EB. fiat

A E B G H F

A H E F G B

A H G E B F

H A G E F B

GH aequalis ipsi GB, et quoniam proportionales sunt EF, EG, EB, erit (in fig. 1. per 19. 5. et dividendo; in 2. per 19. 5. et dividendo inverse; in 3. 4. per 12. 5. et componendo) HF ad BG, ut BG ad EB. quadratum igitur ex GB aequale est rectangulo contento EB, HF. et propter aequales BG, GH erit, in casibus quibus punctum H cadit inter A et F, rectangulum BAF aequale (ipsi BAH una cum contento, AB, HF; hoc est rectangulo BAH, contento EB, HF; et contento EA, HF; hoc est, rectangulo BAH, quadrato ex GB, et contento EA, HF; hoc est, 6. 2.) quadrato ex AG et rectangulo EA, HF. at in casibus quibus punctum H est in FA producta ad partes A, est rectangulum contentum AB, HF aequale (contento AE, HF una cum contento EB, HF; hoc est,) contento AE, HF una cum quadrato ex BG. et ablato communi rectangulo BAH erit reliquum rectangulum

tangulum BAF aequale reliquo rectangulo. sc. AE, HF una cum qua-

A E B G H F

A H E F G B

A H G E B F

H A G E F B

drato ex AG [5. 2.]. est igitur rectangulum AE, HF illud quod una cum quadrato ex AG, aequale est dato rectangulo BAF. habet autem rectangulum AE, HF ad quadratum ex BG, hoc est, ad rectangulum EB, HF eandem rationem quam habet AE ad EB.

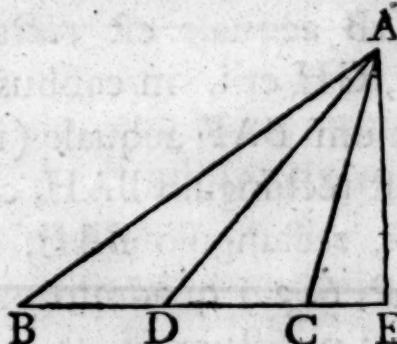
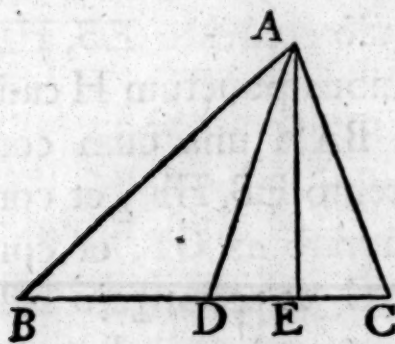
Locus autem hic, in casu quo ratio data est aequalis ad aequale, idem est cum casu primo Loci sequentis in Prop. 5.

LEMMA VI.

Quod est Prop. cxxii. Lib. 7. Pappi Alexandrini, et ipsius Lemma sextum in Lib. 2. Apollonii, non quartum, ut apud Commandinum.

Sit triangulum ABC, et ducatur recta linea AD, quae ipsam BC bifariam fecet. dico quadrata ex BA, AC quadratorum ex AD, DC dupla esse.

Ducatur perpendicularis AE; erunt quadrata ex BE, EC quadrato-



rum ex BD, DE dupla [9. aut 10. 2.]. est autem et quadratum ex AE bis sumptum, una cum quadrato ex DE bis sumpto, duplum quadrati ex AD; et quadrata ex BE,

EC una cum quadrato ex AE bis sumpto, quadratis ex BA, AC sunt aequalia [47. 1.]: quadrata igitur ex BA, AC quadratorum ex AD, DB, hoc est quadratorum ex AD, DC dupla erunt.

LEMMA

Quod est Prop. cxxv. Lib. 7. Pappi Alexandrini, ipsiusque Lemma 7.

$$\begin{aligned} \text{Comp:} \\ AB \cdot BC &= TB \cdot BD \\ AB \cdot BC &= AT \cdot CD \\ AT \cdot CD : CD^2 &= AB \cdot BC \\ n &= TB \cdot DB \end{aligned}$$

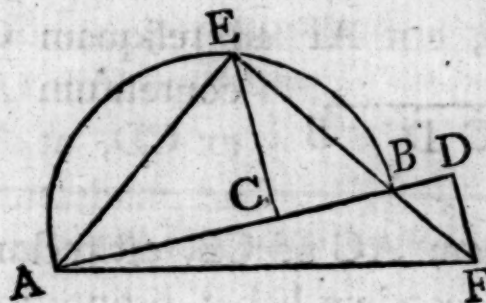
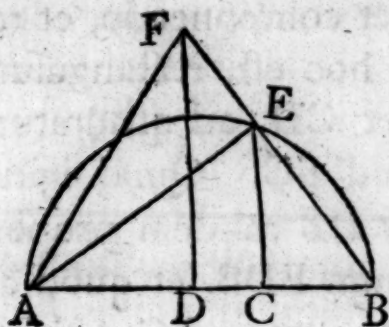
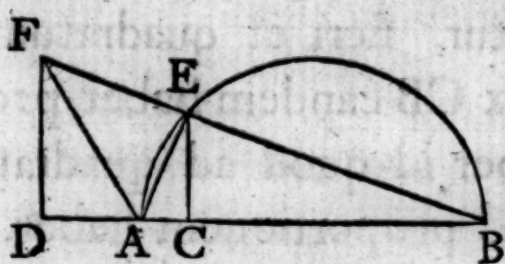
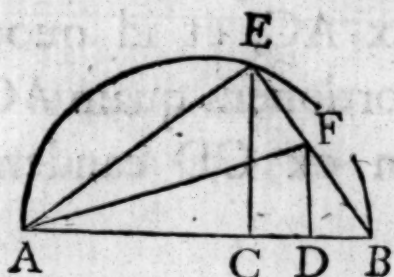
A line segment AB with points F , C , and D marked on it. The points are ordered A, F, C, D, B from left to right.

Haec est ipsius Pappi demonstratio quae quidem inservit casui
Y quando

quando punctum D est inter C, B puncta; poterit autem D esse etiam inter A, C puncta, vel in AB producta ad utraque partes; quatuor autem hi casus, qui, sequendo viam quâ Pappus utitur in eorum primo, diversas requirerent demonstrationes, simul demonstrari possunt ut sequitur.

Praecedentis Lemmatum 7. alia et magis generalis demonstratio.

Super AB descripto semicirculo, ad circumferentiam ducatur CE



ad rectos angulos ipsi AB, et jungantur AE, BE; ad BE vero ducatur DF parallela ipsi CE, et jungatur AF. Quadratum igitur ex DF est id quod ad quadratum ex DB, rationem habet eandem quam (quadratum ex CE

habet ad quadratum ex CB, hoc est quam) AC ad CB. et rectangulum ACB est id quod ad quadratum ex CB, eandem habet rationem quam AC ad CB. quadratum vero ex EF est id quod ad quadratum ex CD, rationem habet eandem quam (quadratum ex EB habet ad quadratum ex CB, hoc est, quam) AB ad BC. Igitur ostendendum est esse quadrata ex AD, DF, simul aequalia quadrato ex AC, rectangulo ACB et quadrato ex EF, hoc est, quadratis ex AE, EF; quod quidem manifestum est, quoniam ex AF quadratum aequale est tam quadratis ex AD, DF quam quadratis ex AE, EF.

LEMMA

LEMMA VIII.

Quod est Prop. cxxvi. Lib. 7. Pappi Alexandrini, ipsiusque Lemma 8.

Sit recta linea AB positione et magnitudine data, et punctum ad libitum sumptum C; dabitur in ipsa AB punctum, ita ut quadratum ex AC, et id quod ad quadratum ex CB datam proportionem habet, aequale erit spatio dato, et ei quod ad quadratum ex recta linea interjecta inter datum punctum et punctum C proportionem habet datam.

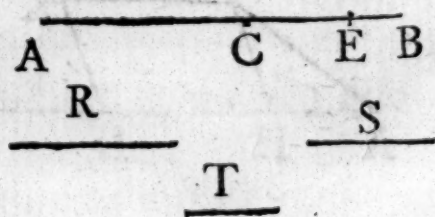
Fiat enim proportio AD ad DB eadem quae proportio data. ergo et proportio AD ad DB data erit, et propterea datum est punctum D. Itaque quoniam recta linea est AB, et duo puncta D, C, erit, per Lem. praecedens, quadratum ex AC, et id quod ad quadratum ex CB proportionem habet $\overline{A \quad D \quad C \quad B}$ eandem quam AD ad DB, hoc est datam, aequale quadrato ex AD, et proportionem habenti ad quadratum ex DB, eandem quam AD ad DB, (quae simul aequalia sunt dato rectangulo BAD) et adhuc aequale ei quod ad quadratum ex DC eandem habet quam AB ad BD proportionem, quae sc. data est.

LEMMA IX.

Data positione et magnitudine recta AB, dabitur punctum ipsam in duo segmenta dividens quae ad datam rectam datas habebunt rationes.

Sit ita, sc. sit punctum C, et recta CE. ergo, ex hypothesi, data est ratio AC ad CE, ut et ratio CB ad CE, quare [8. dat.] dabitur ratio AC ad CB, ergo data est [6. dat.] ratio AB ad AC, et data est AB

Y 2

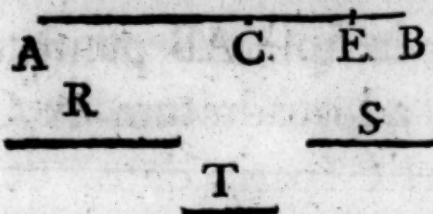


positione

positione et magnitudine, quare data est AC et punctum C; et propter datam rationem AC ad CE dabitur CE.

Componetur vero ita.

Sit data ratio quam habere debet AC ad CE aequalis rationi quam

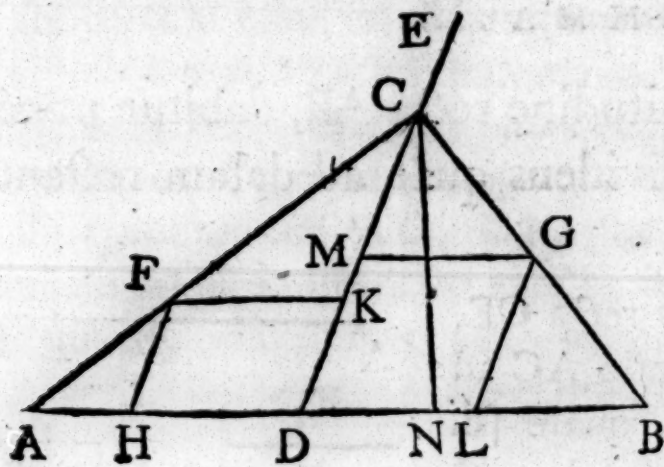


habet recta R ad rectam T, quam autem habere debet CB ad CE, aequalis sit rationi S ad T; et dividatur AB in C, ita ut AC sit ad CB, ut R ad S, sumatur vero CE ad quam CB est ut S ad T, ergo

ex aequo est AC ad CE ut R ad T.

LEMMA X.

Sit triangulum ABC, et a vertice ad basim AB, ducta sit utcunque CD, sitque DE quaevis recta; erit id quod ad quadratum ex AC est ut BD ad DE, una cum eo quod ad quadratum ex BC est ut AD ad DE; aequale ei quod ad quadratum ex AD est ut BD ad DE; et ei quod ad quadratum ex DB est ut AD ad DE, et insuper ei quod ad quadratum ex DC est ut AB ad DE.



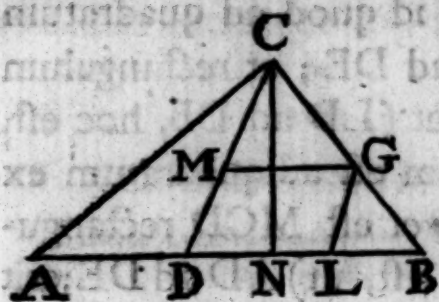
Fiat FC ad CA, ut BD, ad DE; et GC ad CB, ut AD ad DE; et compleantur parallelogramma DHFK, DLGM, et ad AB ducatur perpendicularis CN. est igitur rectangulum FCA id quod ad quadratum ex AC est ut (FC ad CA, hoc est, ut) BD ad DE; et rectangulum

gulum GCB id quod ad quadratum ex BC est ut (GC ad CB, hoc est ut) AD ad DE. rectangulum vero HDA est id quod ad quadratum ex AD, est ut (HD ad DA, hoc est, ut) BD ad DE; et rectangulum LDB est id quod ad quadratum ex DB, est ut (LD ad DB, hoc est, ut) AD ad DE. et quoniam KCD rectangulum est ad quadratum ex DC, ut (KC ad CD, hoc est, ut) BD ad DE; et est MCD rectangulum ad quadratum ex CD, ut (MC ad CD, hoc est, ut) AD ad DE; erit [24. 5.] rectangulum KCD una cum ipso MCD ad quadratum ex DC, ut AB ad DE. ostendendum igitur est rectangula FCA, GCB simul aequalia esse rectangulis HDA, LDB, KCD et MCD. quoniam est LD ad DB, ut AD ad DE, permutando erit LD ad DA, ut (DB ad DE, hoc est, ut FC ad CA, seu ut) DH ad DA; aequales propterea sunt LD, DH. et propter parallelas, est rectangulum FCA ad quadratum ex AC, ut rectangulum HDA ad quadratum ex AD, et ut KCD ad quadratum ex DC, et ut duplum rectangulum HDN ad duplum ADN. et, per 12. 5. ut rectangulum FCA ad quadratum ex AC, ita rectangulum HDA una cum ipso KCD et duplo rectangulo HDN, ad quadratum ex AD una cum quadrato ex DC et duplo rectangulo ADN. Est autem [12. 2.] quadratum ex AC aequale quadratis ex AD, DC, et duplo rectangulo ADN. ergo rectangulum FCA aequale est ipsis HDA, KCD, et duplo rectangulo HDN. similiter omnino, quoniam [13. 2.] quadratum ex BC una cum duplo rectangulo BDN aequale est quadratis ex BD, DC; ostendetur rectangulum GCB una cum duplo LDN aequale rectangulis LDB, MCD. igitur rectangula FCA, GCB una cum duplo LDN aequalia sunt rectangulis HDA, LDB, KCD, MCD et duplo HDN; quorum duplum LDN aequale est duplo HDN. ergo reliquum, sc. rectangula FCA, GCB, aequale est reliquo sc. rectangulis HDA, LDB, KCD, MCD.

Si utraque ratio BD ad DE, et AD ad DE fuerit aequalis ad aequale, Lemma hoc idem est cum Lemmate 6^{to} praecedente: si vero una tantum earum viz. BD ad DE fuerit aequalis ad aequale, Propositio in hoc casu ita enunciabitur, et ostendetur.

Si a vertice C trianguli ABC ducatur ad basim recta CD; erit quadratum

dratum ex AC, una cum eo quod ad quadratum ex BC eandem habet rationem quam AD ad DB, aequale quadrato ex AD, una cum eo quod ad quadratum ex DB, eandem habet rationem quam AD ad DB, et insuper ei quod ad quadratum ex DC eandem habet rationem quam AB ad BD, hoc est, rectangulo BAD, et ei quod ad quadratum ex DC rationem habet eandem quam AB ad BD.

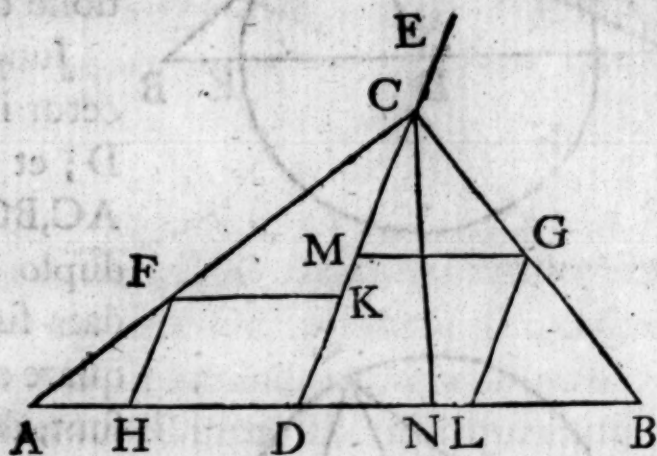


Ducatur CN perpendicularis ad AB, fiatque ut AD ad DB, ita GC ad CB, et ita, completo parallelogrammo DLGM, erit LD ad DB. aequalis igitur est AD ipsi DL, et est rectangulum GCB id quod ad quadratum ex BC, est ut GC ad CB, hoc est, ut LD seu AD ad DB. et rectangulum LDB seu ADB est id quod ad quadratum ex DB, est ut AD ad DB. Quoniam vero rectangulum MCD est ad quadratum ex CD, ut (MC ad CD, hoc est, ut GC ad CB, hoc est, ut) AD ad DB; erit componendo, quadratum ex CD una cum MCD rectangulo, ad quadratum ex CD, ut AB ad BD.

Itaque ostendendum est quadratum ex AC una cum rectangulo GCB aequale quadrato ex AD, rectangulo ADB, quadrato ex CD et rectangulo MCD simul. Quoniam, propter parallelas, est rectangulum GCB ad quadratum ex CB, ut duplum rectangulum LDN ad duplum rectangulum BDN, et ut rectangulum LDB seu ADB ad quadratum ex DB, et ut rectangulum MCD ad quadratum ex CD; et est [13. 2.] quadratum ex CB una cum duplo rectangulo BDN aequale quadratis ex BD, DC; erit [per Lemm 2. Lib. 1. hujus] rectangulum GCB una cum duplo rectangulo LDN, aequale rectangulo ADB una cum rectangulo MCD. Est autem [12. 2.] quadratum ex AC aequale quadratis ex AD, DC, et duplo rectangulo ADN. ergo additis aequalibus, quadratum ex AC, una cum rectangulo GCB, et duplo rectangulo LDN, aequale est quadratis ex AD, DC, duplo rectangulo ADN, rectangulis ADB et MCD simul; quorum duplum rectangulum ADN aequale est duplo rectangulo LDN; ergo reliquum

quum, quadratum sc. ex AC, una cum rectangulo GCB, aequale est reliquo, quadrato sc. ex AD, rectangulo ADB, quadrato ex DC, et rectangulo MCD simul, seu rectangulo BAD, quadrato ex DC, et rectangulo MCD.

COR. Hinc si data sit AB positione et magnitudine, et datae sint rationes rectanguli FCA ad quadratum ex AC, et rectanguli GCB ad quadratum ex BC; dabitur [Lem. 9.] punctum D, et recta DE, quae facient rationem AD ad DE aequalem datae rationi rectanguli GCB ad quadratum ex BC; et rationem BD ad DE aequalem rationi rectanguli FCA ad quadratum ex AC. datae igitur sunt rectae AD, DB, et quadrata ex ipsis data erunt; quare et rectangula HDA, LDB quae ad quadrata illa datas habent rationes. et propterea rectangula FCA, GCB spatia sc. quae ad quadrata ex AC, BC datas habent rationes, simul aequalia sunt spatio dato (rectangulis sc. HDA, LDB) et ei spatio (summae sc. rectangulorum KCD, MCD) quod ad quadratum ex DC datam habet rationem AB ad DE.



PROP. V.

Quae quinta est Lib. 2. Apollonii.

Si a quocunque datis punctis inflectantur rectae ad unum punctum, fuerintque species [hoc est figurae specie datae] ab omnibus descriptae, simul aequales spatio dato; tanget punctum circumferentiam positione datam.

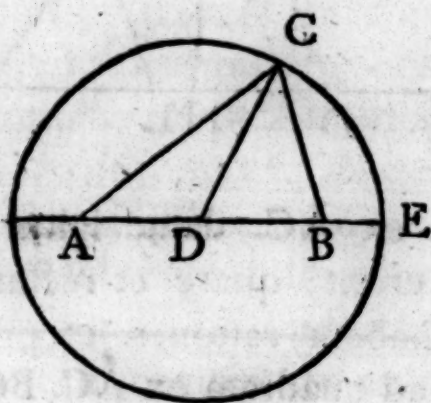
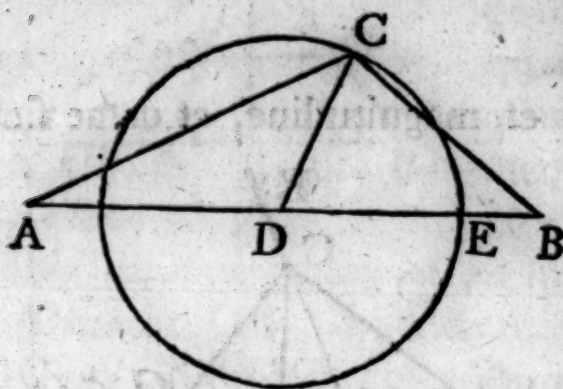
CAS.

CAS. I. Quando data sunt duo puncta.

Primo, sint figurae, super inflexas descriptae, quadrata.

A duobus punctis datis A, B, inflectantur ad punctum C, rectae

AC, BC; sintque quadrata ab ipsis descripta simul aequalia spatio dato: tanget punctum C circumferentiam positione datam.



Jungatur enim AB, bifariamque secetur in D; ergo datum est punctum D; et junctâ DC, erunt quadrata ex AC, BC simul aequalia [per Lemm. 6.] duplo quadratorum ex CD, DA; et data sunt quadrata ex AC, BC simul, quare quadrata ex AD, DC simul data sunt; data autem est AD, et quadratum ex ipsâ; ergo datum est reliquum quadratum ex DC, et ipsâ DC magnitudine dabitur, datumque est punctum D, quare tangit C circumferentiam positione datam per Prop. 1. Lib. 1. hujus.

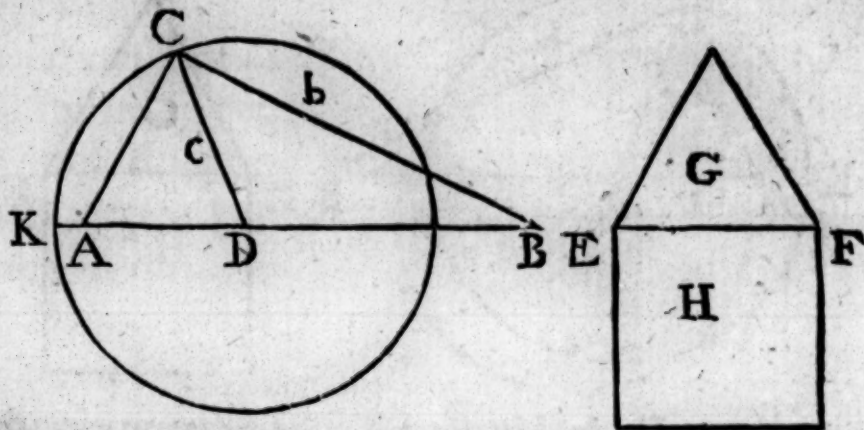
Componetur vero ita.

Quoniam duplum quadratum ex AD, hoc est, rectangulum BAD auferendum est ex spatio dato, oportet spatium datum, majus esse rectangulo BAD. sit igitur spatium datum aequale rectangulo BAD et duplo quadrato ex DE simul; centroque D, intervallo DE, describatur circulus: erit hujus circumferentia Locus quaesitus, hoc est, si ad quodvis in ipsa punctum C, inflectantur a punctis A, B, rectae AC, BC, erunt quadrata ex ipsis simul aequalia duplo quadratorum ex AD, DE, hoc est, spatio dato; quod quidem, junctâ DC, manifestum est ex Lemmate 6. De punctis vero E, in quibus Locus occurrit rectae AB patet per 9. aut 10. 2di. sunt enim quadrata ex AE, EB dupla quadratorum ex AD, DE.

Secundo,

Secundo, Quando figura, super unam ex ductis descripta, est quadratum; non autem altera.

A datis punctis A, B, inflectantur AC, BC, sitque quadratum ex AC, una cum figura specie data, super BC descripta aequale spatium dato: tanget punctum C circumferentiam positione datam.



Jungatur enim AB, et figura super BC descripta dicatur b, et,

quoniam specie data est, dabitur ipsius ratio [49. dat.] ad quadratum ex BC. secetur AB in D, ita ut AD sit ad DB, ut figura b ad quadratum ex BC; et, per casum ultimum Lemm. 10. erit quadratum ex AC una cum b aequale rectangulo BAD, et ei figurae quod ad quadratum ex DC eandem rationem habet quam AB ad BD, hoc est datum. dicatur haec c. et quoniam, ex hypothesi, datum est quadratum ex AC una cum ipsa b, dabitur rectangulum BAD una cum figura c. et datum est rectangulum BAD, ergo data est figura c; et data est ejus ratio ad quadratum ex DC, quod propterea datum erit, ipsaque DC magnitudine dabitur; et datum est punctum D; ergo tangit punctum C circumferentiam positione datam, per Prop. 1. Lib. 1. hujus.

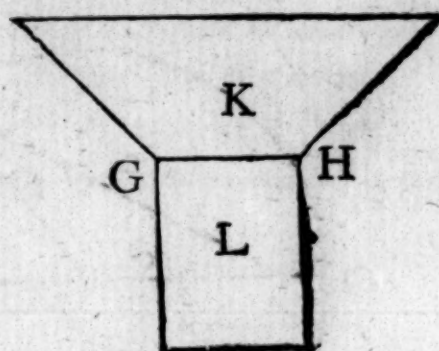
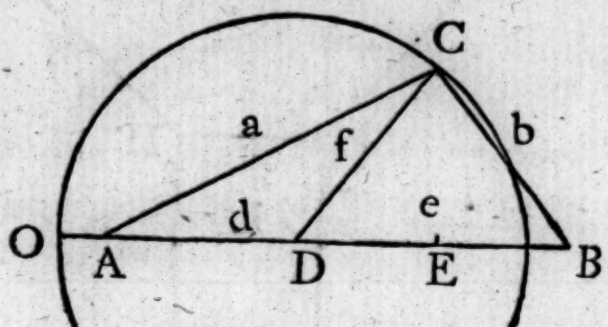
Componetur vero ita.

Exponatur quaevis recta EF, et super ipsam describatur figura G, cui similis esse debet figura super BC; et sit EF latus ipsius homologum lateri BC. et juncta AB secetur in D, ita ut AD sit ad DB, ut G ad quadratum ex EF. et super EF describatur quadratum H. Quoniam igitur est G ad H, ut AD ad DB, erit componendo G et H simul ad H, ut AB ad BD. Datum autem spatium, cui quadratum ex AC una cum figura super BC debet esse aequale, sit M, quod,

Z

ut

Sit figura super AC descripta a, quae vero super BC descripta est, sit b; dabitur igitur [49. dat.] ratio ipsius a ad quadratum ex AC,

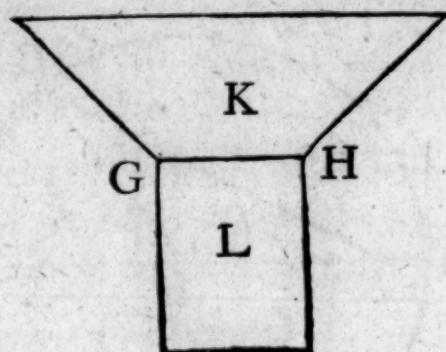
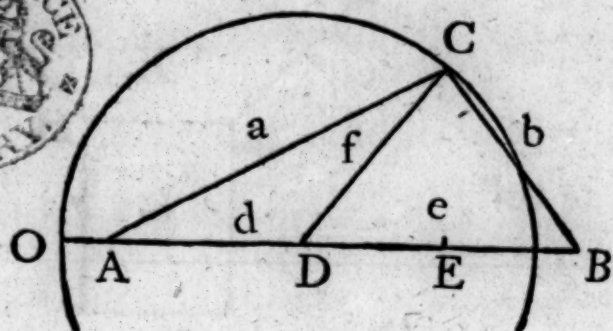


ut et ratio figurae b ad quadratum ex BC. et quoniam datae sunt hae duae rationes, et data est juncta AB positione et magnitudine; dabitur, per Lem. 9. punctum in AB ipsam in duo segmenta dividens quae ad datam rectam, datas has habebunt rationes. sit punctum illud D, et data recta DE, ut sc. BD sit ad DE, ut figura a ad quadratum ex AC; AD vero sit ad DE, ut figura b ad quadratum ex BC. Juncta vero DC, super AD descripta sit figura d similis ipsi a, et super DB figurae similis ipsi b. Erit igitur d ad quadratum ex AD, ut a ad quadratum ex AC, hoc est, ut BD ad DE; similiter erit e ad quadratum ex DB, ut AD ad DE. et per Lemm. 10. erunt figurae a, b, simul aequales ipsis d, e una cum eo quod ad quadratum ex DC est ut AB ad DE. Sitque hoc spatium figura f. ex hypothesi vero figurae a, b simul datae sunt, quare figurae d, e, f simul dabuntur. et datae sunt d, e, quae ad quadrata ex datis AD, BD datas habent rationes; dabitur igitur figura f. habet autem f ad quadratum ex DC datam rationem, quare datum est quadratum ex DC, et ipsa DC magnitudine dabitur. datumque est punctum D, ergo tangit punctum C circumferentiam positione datam per Prop. 1. Lib. 1. hujus.

Componetur vero ita.

Super eandem rectam GH sint duae figurae K, L, quarum K sit ea cui figura super AC similis esse debet, L vero cui figura super BC

BC similis describenda est; sit vero in utraque K, L, latus GH ipsi AC, BC homologum. et per Lemm. 9. secetur recta AB in D, et inveniatur



DE, ita ut BD sit ad DE, ut figura K ad quadratum ex GH; AD vero sit ad DE, ut figura L ad quadratum ex eadem GH; et per 24. 5. figura ex K, L composita erit ad quadratum ex GH, ut AB, ad DE. Super AD vero descripta sit figura d similis ipsi K, et super DB, figura e similis ipsi L. datum autem spatium cui figurae super AC, BC simul aequales esse debent, sit M, quod, ut ex analysi constat, majus debet esse ipsis d, e simul. sit igitur M aequalis ipsis d, e et spatio N simul; et per 25. 6. inveniatur figura f aequalis ipsi N, similis vero ei quae ex ipsis K, L composita est; et sit DO aequalis lateri ipsius quod ipsi GH homologum est. Centroque D, intervallo DO, circulus describatur; erit hujus circumferentia Locus quaesitus. hoc est, si ad quodvis in ipsa punctum C inflectantur AC, BC, erit figura a super AC quae similis est ipsi K una cum figura b super BC quae similis est ipsi L, aequalis spatio dato M. Jungatur enim DC, et quoniam figura f super DO seu DC, similis est ei quae ex K, L composita est, erit f ad quadratum ex DC, ut (K et L simul ad quadratum ex GH, hoc est, ut) AB ad DE; quare per Lemm. 10. figurae a, b simul aequales sunt ipsis d, e, f, hoc est, ipsis d, e, N hoc est, ex constructione, spatio dato M.

Si autem figurae a, b, sint similes, hoc est, si fuerit a ad quadratum ex AC, ut b ad quadratum ex BC, Locus deducetur ad eum in quo figurae specie datae sunt quadrata. erunt enim [12. 5.] a et b simul ad quadrata

quadrata ex AC, BC simul, ut a ad quadratum ex AC, hoc est in ratione data; et, ex hypothesi, a et b simul dato spatio sunt aequales, quare quadrata ex AC, BC, simul data erunt. ergo per primum articulum hujus Casus 1^{mi}, tanget punctum C circumferentiam positione datam. Spatium autem cui aequalis est summa quadratorum ex AC, BC, invenietur faciendo spatium datum M ad aliud N, in data ratione quam habere debet a ad quadratum ex AC; erit enim N aequale summae quadratorum ex AC, BC, ut patet.

Cas. 2. Quando data sunt tria puncta.

Primo, Quando figurae, super inflexas, sunt quadrata.

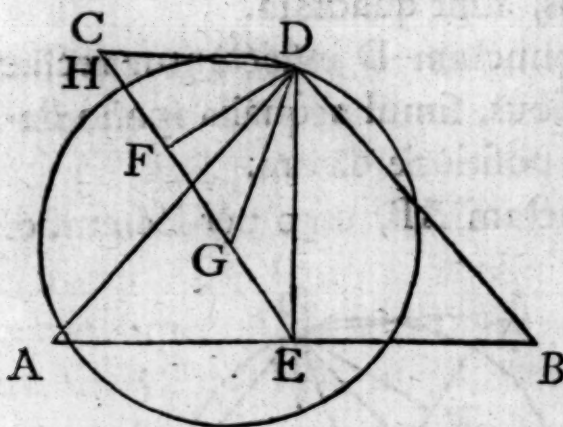
Data sint tria puncta A, B, C, et ad punctum D inflectantur rectae AD, BD, CD; sintque quadrata ex omnibus, simul aequalia spatio dato: tanget punctum D circumferentiam positione datam.

Ducatur enim DE bifariam secans junctam AB, ergo per Lemm. 6. quadrata ex AD, BD simul aequalia sunt rectangulo BAE et duplo quadrato ex ED; tria igitur quadrata ex AD, BD, CD aequalia sunt rectangulo BAE, duplo quadrato ex ED, et quadrato ex CD simul; hoc est, ductâ DF perpendiculari ad junctam EC, tria praedicta quadrata simul aequalia sunt rectangulo BAE, quadrato ex CF, duplo quadrati ex FE et triplo quadrati ex DF. Quoniam vero data est ratio dupli quadrati ex FE ad ipsum quadratum ex FE, dabitur per Lemm. 8. punctum in EC, sc. punctum dividens ipsam in G, ita ut CG sit dupla ipsius GE, quod faciet quadratum ex CF simul cum duplo quadrati ex FE aequale dato spatio, rectangulo sc. ECG, una cum eo quod ad quadratum ex GF rationem habet eandem quam CE ad EG, hoc est aequale rectangulo ECG, una cum triplo quadrati ex GF. fiat igitur CG dupla ipsius GE, et tria quadrata ex AD, BD, CD, simul aequalia erunt datis rectangulis BAE, ECG, et triplo

plo (quadratorum ex GF, FD, hoc est) quadrati ex GD. Quare rectangula BAE, ECG, triplumque quadrati ex GD simul dantur; et data sunt BAE, ECG; quare datur triplum quadrati ex GD; datum igitur est ipsum quadratum ex GD, et recta GD, datum autem est punctum G; ergo tangit punctum D circumferentiam positione datam.

Componetur vero ita.

Jungantur quaevis duo ex punctis datis recta AB, bifariamque sec-
ta AB in E, jungatur EC, quae dividatur in G ita ut CG dupla sit

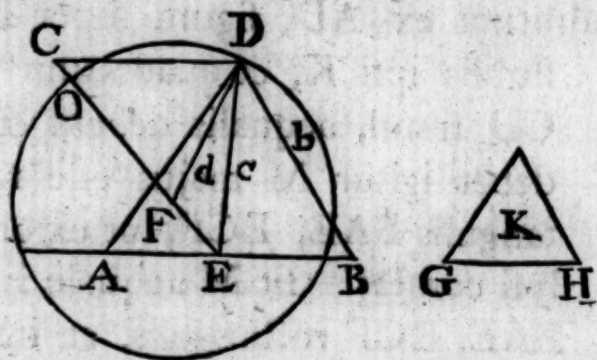


ipsius GE. et quoniam requiritur ut rectangula BAE, ECG auferantur ex spatio dato; oportet spatium hoc ipsis simul majus esse; sit igitur spatium datum aequale ipsis BAE, ECG rectangulis una cum triplo quadrato ex recta GH; et centro G, intervallo GH, describatur circulus; erit hujus circumferentia Locus quaesitus. hoc est, si a

punctis datis A, B, C inflectantur ad quodvis in ipsa punctum D, rectae AD, BD, CD, erunt tria quae fiunt ex ipsis quadrata simul aequalia spatio dato, hoc est, rectangulis BAE, ECG et triplo quadrato ex GH. Jungantur enim ED, DG, et ducatur DF perpendicularis ad EH. Quoniam igitur bifariam secata est AB in E, erunt, per Lemma 6^{um}, quadrata ex BD, AD simul aequalia rectangulo BAE et quadrato ex ED bis, hoc est, ipsi BAE, et quadratis ex FE, FD bis sumptis; addatur utrinque quadratum ex CD, seu quadrata ex CF, FD; et tria quadrata ex CD, BD, AD simul aequalia erunt rectangulo BAE, quadrato ex CF, quadrato ex FE bis, et quadrato ex FD ter; et horum per Lemma 7. (quoniam sc. CG facta est dupla ipsius GE) quadratum ex CF una cum quadrato ex FE bis aequale est rectangulo ECG et quadrato ex GF ter. ergo tria quadrata ex CD, BD, AD, simul aequalia sunt rectangulis BAE, ECG, et (quadratis ex GF, FD
ter

Secundo, Sint duae ex figuris quadrata, reliqua autem non fit quadratum.

dratum ex AD, figura specie data super BD descripta, et quadratum ex CD, simul, æqualia spatio dato: tanget punctum D circumferentiam positione datam.

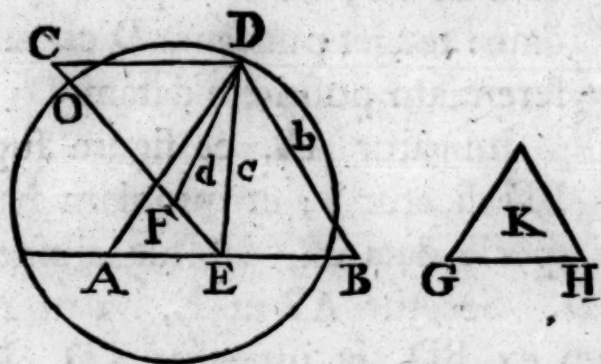


Jungatur AB, et figura super BD dicatur b; et quoniam haec specie data est, dabitur ejusdem

Com ponetur

Componetur vero ita.

Super rectam quamvis GH, describatur figura K, cui similis esse debet figura super BD. sitque GH latus ejus homologum lateri BD; et secetur juncta AB in E, ita ut AE sit ad EB, ut K ad quadratum ex GH. Jungatur EC, et secetur in F, ita ut CF sit ad FE, ut AB ad BE. sitque M spatium, cui quadratum ex AD, figura super BD



similis ipsi K, et quadratum ex CD simul, aequalia debent esse. debet igitur M majus esse rectangulis BAE, ECF, ut ex analysi constat. sit M aequale ipsis BAE, ECF rectangulis, et insuper figurae d. et ut CE ad EF, ita sit d ad quadratum ex recta

FO quae ponatur a puncto F; centroque F, intervallo FO, describatur circulus; erit hujus circumferentia Locus quaesitus. hoc est, si ad quodvis in ipsa punctum D, ducantur AD, BD, CD, et super BD describatur figura b, similis ipsi K; erit quadratum ex AD, figura b, et quadratum ex CD simul, aequale spatio dato M. Jungatur enim ED et FD; et sit c figura quae ad quadratum ex ED, est ut CF ad FE, hoc est, ut AB ad BE. et quoniam a vertice D trianguli CED, ducta est DF ad basim; et est d ad quadratum ex FO seu FD, ut CE ad EF, erit per Casum ultimum Lemm. 10. quadratum ex CD una cum figura c aequale rectangulo ECF, et figurae d. et quoniam b similis est ipsi K, erit b ad quadratum ex BD, ut (K ad quadratum ex GH, hoc est, ut) AE ad EB. est autem c ad quadratum ex ED, ut AB ad BE, igitur, quoniam a vertice D trianguli ABD, ducta est DE ad basim, erit quadratum ex AD, et figura b simul, aequalia rectangulo BAE, et figurae c. additoque quadrato ex CD, erit quadratum ex AD, figura b, et quadratum ex CD, aequalia rectangulo BAE, figurae c, et quadrato ex CD, hoc est, ex praemissis, rectangulis BAE, ECF et figurae d, hoc est spatio dato M.

Tertio,

Jungatur AB , et figura super AD dicatur a , et ea super BD , b . Dabitur igitur ratio [49. dat.] a ad quadratum ex AD , et ratio b ad quadratum ex BD . Inveniri igitur

A geometric diagram featuring a circle with center G . Points A, C, E, F, D are on the circle's circumference. A horizontal line segment AB passes through the circle, with points C, E, F, D marked on it. A line segment AD is drawn. A triangle H is attached to the right side of the circle, with its base KL on the line AB . A rectangle M is attached below the triangle H , with its base NO on the line AB . Various points are labeled with letters and small letters: $C, G, f, a, e, d, b, K, L, H, M, N, O$.

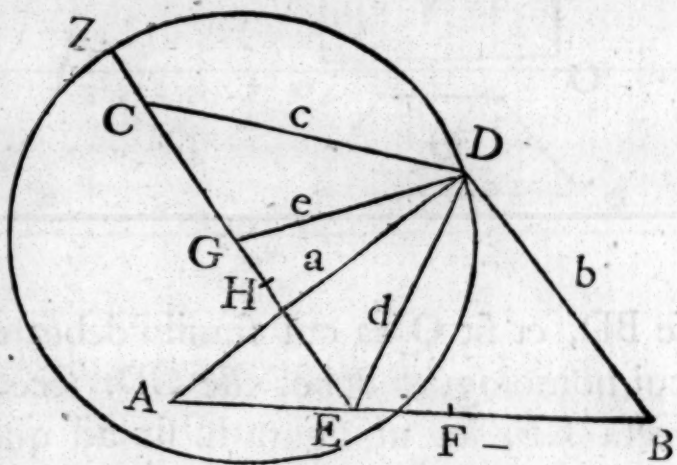
A a

que

quadratum ex AD, ut BE ad EF; b ad quadratum ex BD, ut AE ad EF; c ad quadratum ex AE, ut BE ad EF; d ad quadratum ex BE, ut AE ad EF, et e ad quadratum ex ED, ut AB ad EF; erit, per Lemm. 10. a et b simul aequales ipsis c, d, e. ergo a, b una cum quadrato ex CD simul, aequales sunt ipsis c, d, e, et quadrato ex CD; hoc est, ex praemissis, ipsis c, d, rectangulo ECG, et ipsi f, hoc est, ex constructione, spatio dato P.

Quarto, Data sint tria puncta A, B, C, et ab ipsis ad punctum D inflectantur rectae AD, BD, CD, sintque figurae speciei datae super ipsas descriptae simul aequales spatio dato. tanget punctum D circumferentiam positione datam.

Sit a figura super AD, b figura super BD, et c ea quae super CD descripta est. et quoniam figurae a, b ad quadrata ex ipsis AD, BD datas habent rationes, poterit, per Lemm. 9. inveniri in AB punctum E, et recta EF, ita ut a sit ad quadratum ex AD, ut BE ad EF, b vero sit ad quadratum ex BD, ut AE ad EF. Inveniantur, et per Cor. Lemm. 10. erunt figurae a, b simul aequales spatio dato, (quod dicatur T) una cum eo quod est ad quadratum ex DE, ut AB ad EF, quod sit figura d. tres igitur figurae a, b, c simul aequales sunt spatio T et figuris d, c. datae autem sunt rationes quam d, c habent ad quadrata ex ED, CD, rursus igitur per Lemm. 9. inveniatur punctum G in ipsa CE, et recta GH, ita ut figura c sit ad quadratum ex CD, ut GE ad GH, et figura d sit ad quadratum ex ED (hoc est AB sit ad EF) ut CG ad GH. et per Cor. Lem. 10. figurae c, d, simul aequales erunt dato spatio, (quod dicatur V) et ei quod ad quadratum ex juncta GD, datam habet rationem CE ad GH, quod sit figura e. tres igitur figurae a, b, c (seu spatium T una cum figuris c, d) simul aequales sunt spatiis T, V, et figurae e; quae

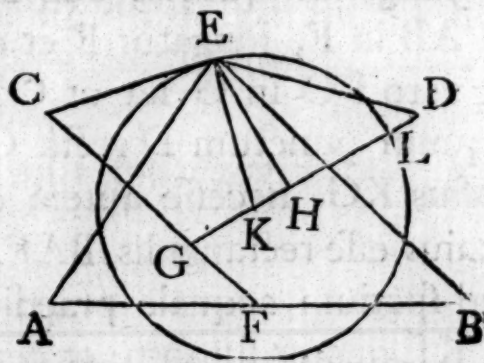


recta ad cuius quadratum spatium Y est ut CE ad GH; et centro G intervallo GZ, describatur circulus; erit hujus circumferentia Locus quaesitus. ad quodvis enim in ipsa punctum D ducantur AD, BD, CD, et super ipsas describantur figurae a, b, c similes ipsis K, N, Q; sintque AD, BD, CD ipsorum latera quae homologa sunt ipsis LM, OP, RS; erunt a, b, c simul aequales spatio X. Jungantur enim ED, GD, et quoniam similes sunt figurae a, K, erit a ad quadratum ex AD, ut (K ad quadratum ex LM, hoc est, ex constructione, ut) BE ad EF, similiter erit figura b ad quadratum ex BD, ut AE ad EF. sit autem d illud quod ad quadratum ex ED, est ut AB ad EF. igitur per Lemm. 10. figurae a, b, simul aequales sunt ipsis T, d. Rursus, quoniam similes sunt figurae c, Q, erit c ad quadratum ex CD, ut (Q ad quadratum ex RS, hoc est, ut) EG ad GH; d vero est ad quadratum ex ED, ut (AB ad EF, hoc est, ut) CG ad GH. ergo, per Lemm. 10. figurae c, d simul aequales sunt spatio V, et (ei quod est ad quadratum ex GD, seu GZ, ut CE ad GH, hoc est) spatio Y. additoque communi spatio T, erunt c, d, T simul aequalia ipsis T, V, Y. a vero et b simul aequales sunt ipsis T, d. ergo figurae a, b, c simul aequales sunt spatiis T, V, Y, hoc est spatio dato X.

CAS. 3. Quando data sunt quatuor puncta.

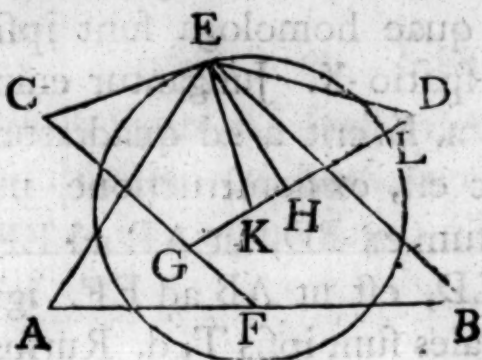
Data sint quatuor puncta A, B, C, D, et ad punctum E inflectantur AE, BE, CE, DE, sintque quadrata ex omnibus, simul aequalia spatio dato: tanget punctum E circumferentiam positione datam.

Jungatur enim AB, et ducatur EF ipsam bifariam secans in F; junctaque FC, ducatur EG secans ipsam in G, ita ut CG dupla sit ipsius GF; et ut ostensum fuit in casu trium punctorum, quadrata ex AE, BE, CE simul aequalia erunt datis rectangulis BAF, FCG, et triplo quadrati ex GE; ergo ducta EH perpendiculari ad GD, quatuor quadrata ex AE, BE, CE,



CE, DE simul aequalia erunt rectangulis BAF, FCG, quadrato ex DH, triplo quadrati ex HG et quadruplo quadrati ex HE. Quoniam igitur datur ratio quadrati ex HG ter sumpti ad ipsum quadratum ex HG, si dividatur DG in K, ita ut DK tripla sit ipsius KG; erit, per

Suppleantur
rectae GE,
FE.



Lemm. 7. quadratum ex DH simul cum quadrato ex HG ter, aequale dato rectangulo GDK una cum eo quod ad quadratum ex KH eandem habet rationem quam DG ad GK, hoc est aequale rectangulo GDK una cum quadrato ex KH quater; ergo quatuor quadrata ex AE, BE, CE, DE, simul

aequalia erunt datis rectangulis BAF, FCG, GDK, et (quadratis ex KH, HE quater, hoc est) quadrato ex KE quater. et, ex hypothesi, quatuor illa quadrata simul dantur; quare tria rectangula una cum quadrato ex KE quater simul dantur; et data sunt rectangula; quare quadratum ex KE quater, datum est; datumque propterea est quadratum ex KE, et recta KE; datum autem est punctum K, ergo tangit punctum E circumferentiam positione datam.

Componetur vero ita.

Jungantur quaevis duo ex punctis datis recta AB, et bifariam secata AB in F, jungatur F et quodvis ex reliquis punctis recta FC; secata vero FC in G ita ut CG dupla sit ipsius GF, jungatur G et reliquum punctum D recta GD quae ita secetur in K ut DK tripla sit ipsius KG. necesse autem est, ut ex analysi constat, spatium datum majus esse rectangulis BAF, FCG, GDK simul sumptis; sit igitur illud spatium aequale praedictis tribus rectangulis, et quadrato ex recta KL quater sumpto; et centro K, intervallo KL, describatur circulus; erit hujus circumferentia Locus quaesitus, hoc est, si a quatuor datis punctis A, B, C, D ad punctum quodvis E in ipsa inflectantur rectae AE, BE, CE, DE; erunt quadrata ex ipsis simul sumpta aequa-

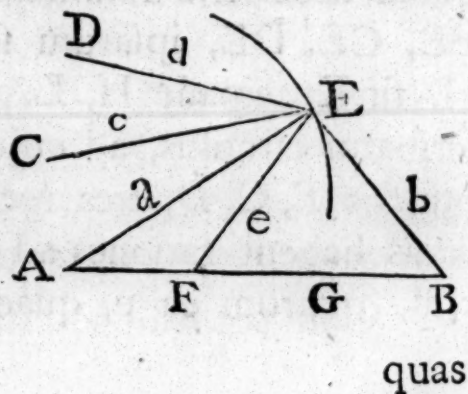
lia

lia spatio dato, hoc est, rectangulis BAF, FCG, GDK et quadrato ex KL quater. Jungantur enim EF, EG, EK, et ad GD ducatur perpendicularis EH; et quoniam bifariam secta est AB in F, CG autem dupla est ipsius GF; erunt, ut in compositione praecedentis ostensum, tria quadrata ex CE, BE, AE simul aequalia rectangulis BAF, FCG et quadrato ex GE ter, hoc est ipsis BAF, FCG et quadratis ex HG, HE ter sumptis. addatur utrinque quadratum ex DE; seu quadrata ex DH, HE; eruntque quatuor quadrata ex DE, CE, BE, AE simul aequalia rectangulis BAF, FCG, quadrato ex DH, quadrato ex HG ter, et quadrato ex HE quater; quorum per Lem. 7. (quoniam sc. DK facta fuit tripla ipsius KG) quadratum ex DH una cum quadrato ex HG ter, aequale est rectangulo GDK una cum quadrato ex HK quater. ergo quatuor quadrata ex DE, CE, BE, AE simul aequalia sunt rectangulis BAF, FCG, GDK, una cum (quadratis ex HK, HE quater, hoc est) quadrato ex KE seu KL quater, hoc est) ex constructione, spatio dato.

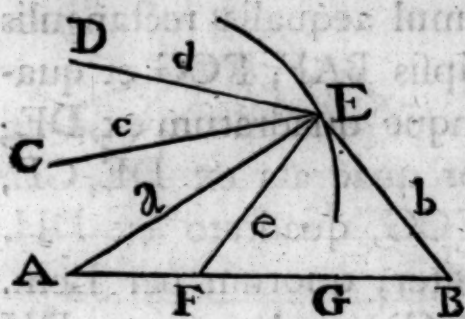
Atque ita, crescente numero punctorum, analysi et compositio necessario longiores evadunt, si instituendae essent, nulla habita ratione praecedentium casuum qui magis simplices sunt. Utile igitur est, ut in pagina 89. observatum fuit, in Propositionibus in quibus numerus rerum datarum poterit sine fine augeri, viam ostendere, quâ Locus in dato numero punctorum propositus, ad Locum in quo numerus eorundem, isto numero proxime minor sit, deduci poterit; in analysi sc. ut compositio, ad numerum huic proxime majorem, progrediatur, ut in casu sequente fit, viz.

Datis quatuor punctis A, B, C, D, si ab ipsis inflectantur AE, BE, CE, DE ad unum punctum fueritque summa figurarum, super ipsas, quae specie datae sunt, aequalis spatio dato: tanget punctum E circumferentiam positione datam.

Dicatur enim figura super AE, a; quae super BE, b; super CE, c; et super DE, d. harum igitur, ad quadrata ex rectis, super



quas descriptae sunt, rationes datae erunt [49. dat.]. Jungatur AB, et secetur in F, et inveniatur recta FG, [Lemm. 9], ita ut figura a sit ad quadratum ex AE, ut BF ad FG; et figura b sit ad quadratum ex BE, ut AF ad FG. ergo, per Cor. Lemm. 10.



figurae a, b simul aequales sunt spatio dato, quod dicatur H, et figurae quae ad quadratum ex juncta FE datam habet rationem, quam sc. habet AB ad FG. dicatur autem haec figura e. ex hypothese vero, figurae a, b, c, d simul aequales sunt spatio dato; quare spatium H una cum figuris e, c, d, eidem spatio dato est aequale. et datum est spatium H. ergo figurae e, c, d, simul datae sunt. Quoniam igitur a datis tribus punctis F, C, D, inflexae sunt ad punctum E, rectae FE, CE, DE, et summa figurarum specie datarum quae super ipsas descriptae sunt, ipsarum sc. e, c, d, data est; tanget punctum E circumferentiam positione datam, per Casum praecedentem.

Componetur ita.

Sit ratio quam figura a habet ad quadratum ex AE eadem quam habet recta R ad ipsam T, quam vero habet figura b ad quadratum ex BE, sit ea quam habet S ad eandem T. et per Lemm. 9. secetur AB in F, et inveniatur recta FG, ita ut BF sit ad FG, ut R ad T; AF vero sit ad FG, ut S ad T. sit vero figura quae ad quadratum ex AF, est ut BF ad FG, una cum ea quae ad quadratum ex BF, est ut AF ad FG, aequalis spatio H. sitque K spatium datum, cui aequalis debet esse summa figurarum specie datarum super ipsis AE, BE, CE, DE, ipsarum sc. a, b, c, d; igitur debet K majus esse ipso H. sit K aequale H, L, spatiis. et per casum 2. praecedentem describatur circulus, ad cuius quodvis punctum E, si ducantur a datis punctis F, C, D, tres rectae, FE, CE, DE, figurae super ipsas, quae datas habent rationes ad quadrata ex ipsis FE, CE, DE, ipsae sc. e, c, d, (quarum ea e, quae super FE describenda est habet ad quadratum

dratum ex FE datam rationem quam habet AB ad FG) simul aequales erunt spatium L. erit hujus circumferentia Locus quaesitus. hoc est, si jungantur AE, BE, et super ipsas sint figurae a, b, quae ad quadrata ex AE, BE datas habent rationes R ad T, et S ad T; erunt figurae a, b, c, d, simul aequales spatium K. Quoniam enim a vertice E trianguli ABE, ducta est EF ad basim, et est a ad quadratum ex AE, ut R ad T, hoc est, ut BF ad FG; b ad quadratum ex BE, ut S ad T, hoc est, ut AF ad FG; figura vero quae ad quadratum ex AF, est ut BF ad FG, una cum ea quae est ad quadratum ex BF, ut AF ad FG simul aequales sunt spatium H; et figura, e, super FE est ad quadratum ex FE, ut AB ad FG; erit per Lemm. 10. a una cum b aequalis spatium H et figurae e: ex constructione autem, figurae e, c, d simul aequales sunt spatium L. ergo spatium H una cum figuris e, c, d; hoc est figurae a, b, c, d simul aequales sunt ipsis H, L spatiis, hoc est spatium dato K.

Eodem prorsus modo, si data sint quinque puncta, analysis et compositio Loci fiet ope earum quae Loco ad quatuor puncta data inserviebant, et solutio Loci ad sex puncta fiet ope ejus ad quinque; et similiter uniformi semper tenore, quotcunque data fuerint puncta.

Casum hunc, in quo figurae speciei datae non sunt quadrata, Fermatius Apollonium non vidisse videri affirmat. deceptus sc. eo quod verbum *species* ubique *quadrata* interpretatur. species vero seu τὸ εἶδος significat figuram quamcunque rectilineam, ut in Prop. 31. Lib. 6. Elem. Euclidis; apud Pappum vero in hac Propositione, et sequente sexta, ut et in ipsius ultima Lib. 1. de Locis Planis, idem significat quod apud Euclidem, in Prop. 52, 53, 54. Datorum, vocatur τὸ εἶδος εἶδες δεδομένον; quodque a Pappo secundum ipsius contractum dicendi modum, simpliciter τὸ εἶδος dicitur.

Locum hunc celeberrimum inter pulcherrimas Geometriae propositiones merito existimat Cl. Fermatius in epist. ad Robervallium pag. 151. Var. Oper. Math. Cum vero varias ipsius solutiones tentabam, praecedens Lemma 7. ex quo locum hunc facile deductum iri videbam, investigavi; postea autem ipsissimum hoc Lemma apud Pap-

res in causa fuisse videtur cur in solutionem Apollonianam non inciderunt.

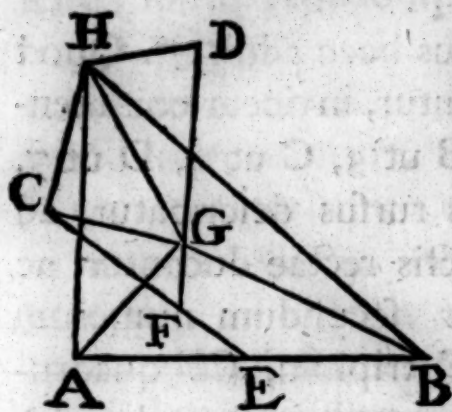
Ad finem ejusdem Propositionis 12. Hugenus haec addit: " Quod
 " si puncta data diversas gravitates habere ponantur, invicem commen-
 " surabiles, ut si punctum A ponderet ut 2, B ut 3, C ut 4, D ut 7.
 " eorumque reperto gravitatis centro, circulus rursus describatur, ad
 " cujus circumferentiae punctum, a datis punctis rectae ducantur, ac
 " singularum quadrata multiplicia sumantur secundum numerum
 " puncti sui; ut quadratum AF duplum, BF triplum, CF quadru-
 " plum, DF septuplum; dico rursus summam omnium aequalem fo-
 " re spatio dato, semperque eidem, ubicunque in circumferentia punc-
 " tum sumptum fuerit. Patet enim hoc ex praecedenti demonstrati-
 " one, si imaginemur puncta ipsa multiplicia secundum numeros at-
 " tributae cuique gravitatis; quasi nempe in A duo puncta conjuncta
 " sint, in B tria, in C quatuor, in D septem, atque illa omnia aequa-
 " liter gravia."

Verum conditio haec, quod pondera debent inter se commensura-
 bilia esse, minime necessaria est; si enim pondera ad unum aliquod
 pondus, datas habeant rationes, et sumantur spatia quae ad quadrata
 ex ductis, a datis punctis ad punctum quodvis in circumferentia cir-
 culi descripti, datas has habeant rationes; erit summa omnium spati-
 orum, dato spatio aequalis; ut ex Corollario 3. sequente manifestum
 erit.

COR. I. Datis in plano punctis quotlibet, si ab ipsis et eorum cen-
 tro gravitatis inflectantur rectae ad punctum quodlibet; erit summa
 quadratorum ex ductis aequalis dato spatio (summae sc. quadratorum
 ex ductis, a datis punctis, ad eorum centrum gravitatis) simul cum
 multiplo quadrati ex ducta a centro gravitatis ad idem punctum, se-
 cundum numerum punctorum.

Sint enim, ex. gr. quatuor puncta A, B, C, D, et bifariam secta juncta
 AB in E, erit E centrum gravitatis punctorum A, B. junctâ autem
 EC, et sectâ in F, ita ut CF dupla sit ipsius FE, erit F centrum gra-
 vitatis

vitatis trium punctorum A, B, C. similiter, iuncta FD, et secta in G,



ita ut DG tripla sit ipsius GF, erit G centrum gravitatis quatuor punctorum A, B, C, D; et ita deinceps, si plura fuerint puncta. Ducantur autem AG, BG, CG, DG, et, ut in hac Propositione 5. ostendetur summa quadratorum ex AG, BG, CG aequalis (duplo quadrati ex AE, uno cum duplo quadrati ex EF, et quadrato ex CF, et triplo quadrati ex FG; hoc est) rectangulo BAE, una cum rectangu-

lo ECF, et triplo quadrati ex FG. Quare summa quadratorum ex AG, BG, CG, DG aequalis erit rectangulis BAE, ECF, triplo quadrati ex FG, et quadrato ex DG; hoc est, quia triplum quadrati ex FG aequale est rectangulo FGD, rectangulis BAE, ECF, FDG. Ducantur jam a datis punctis ad punctum quodlibet H, rectae AH, BH, CH, DH, et jungatur GH; erit, per hanc Propositionem, summa quadratorum ex AH, BH, CH, DH aequalis rectangulis BAE, ECF, FDG, et quadruplo quadrati ex GH, hoc est, summae quadratorum ex AG, BG, CG, DG, et quadruplo quadrati ex GH. et sic si plura fuerint puncta.

COR. II. Si in circulo inscribatur quaevis figura aequilatera, et ab angulis figurae, et centro circuli inflectantur rectae ad punctum quodlibet; erit summa quadratorum ex ductis ab angulis figurae, aequalis multiplo summae quadratorum ex ea quae a centro ducta est, et ex semidiametro, secundum numerum laterum figurae inscriptae.

COR. III. Datis in plano punctis quotlibet, quae diversas habere ponantur gravitates; pondera autem eorum ad unum aliquod pondus datas habeant rationes; si ab ipsis et eorum centro gravitatis inflectantur rectae ad punctum quodlibet; erit summa spatiorum quae ad quadrata ex ductis a datis punctis, datas illas habent rationes, singula ad singula, aequalis spatio dato, una cum spatio quod est ad quadratum ex recta ducta a centro gravitatis, ut summa omnium ponderum est ad unum illud pondus.

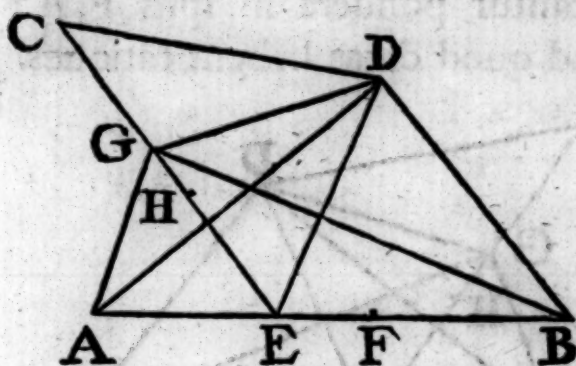
Datum

Datum autem spatium aequale erit summae spatiorum, quae ad quadrata ex ductis a datis punctis ad centrum gravitatis, singula ad singula, praedictas datas habent rationes.

Sint data puncta A, B, C &c. et dicantur pondera in ipsis P, A; P, B; P, C; fitque P, Q pondus illud ad quod datas habent rationes. et juncta AB secetur in E, et inveniatur recta EF, [Lem. 9.] ita ut P, A sit ad P, Q, ut BE ad EF; ut vero P, Q ad P, B, ita sit EF ad AE: ergo, ex aequo, erit P, A ad P, B; ut BE ad EA. Est igitur E centrum gravitatis ipsorum P, A; P, B. similiter juncta EC secetur in

est ut CE ad GH, hoc est, ex praemissis, ut summa ipsorum P, A; P, B; P, C; ad P, Q.

Spatium autem hoc datum, (cui sc. una cum spatio e, aequalis est



summa ipsorum a, b, c) in citato articulo aequale ostensum fuit spatiis T, V, seu spatio quod ad quadratum ex AE, est ut BE ad EF una cum eo quod ad quadratum ex BE, est ut AE ad EF, et spatio quod ad quadratum ex CG, est ut EG ad GH, una cum eo quod ad

quadratum ex EG, est ut CG ad GH. Ductis igitur AG, BG ostendendum est hisce spatiis aequalem esse summam spatiorum quae ad quadrata ex ipsis AG, BG, CG sunt ut P, A; P, B; P, C; ad P, Q. est, per Lem. 10. id quod ad quadratum ex AG, est ut (BE ad EF, hoc est, ut) P, A ad P, Q; una cum eo quod est ad quadratum ex BG, ut (AE ad EF, hoc est, ut) P, B ad P, Q; aequale ei quod ad quadratum ex AE est ut BE ad EF, una cum eo quod ad quadratum ex EB, est ut AE ad EF, et insuper ei quod ad quadratum ex EG, est ut (AB ad EF, hoc est ut) CG ad GH. aequalibus hisce addatur id quod ad quadratum ex CG est ut (EG ad GH, hoc est ut) P, C ad P, Q; et erunt spatia quae ad quadrata ex ipsis AG, BG, CG sunt ut P, A; P, B; P, C; ad P, Q, simul aequalia spatio quod ad quadratum ex AE, est ut BE ad EF; ei quod ad quadratum ex BE, est ut AE ad EF; ei quod ad quadratum ex EG, est ut CG ad GH; et ei quod ad quadratum ex CG, est ut EG ad GH; quod erat ostendendum.

Et ex hoc sequitur Corollarium simile Corollario 2. praecedente.

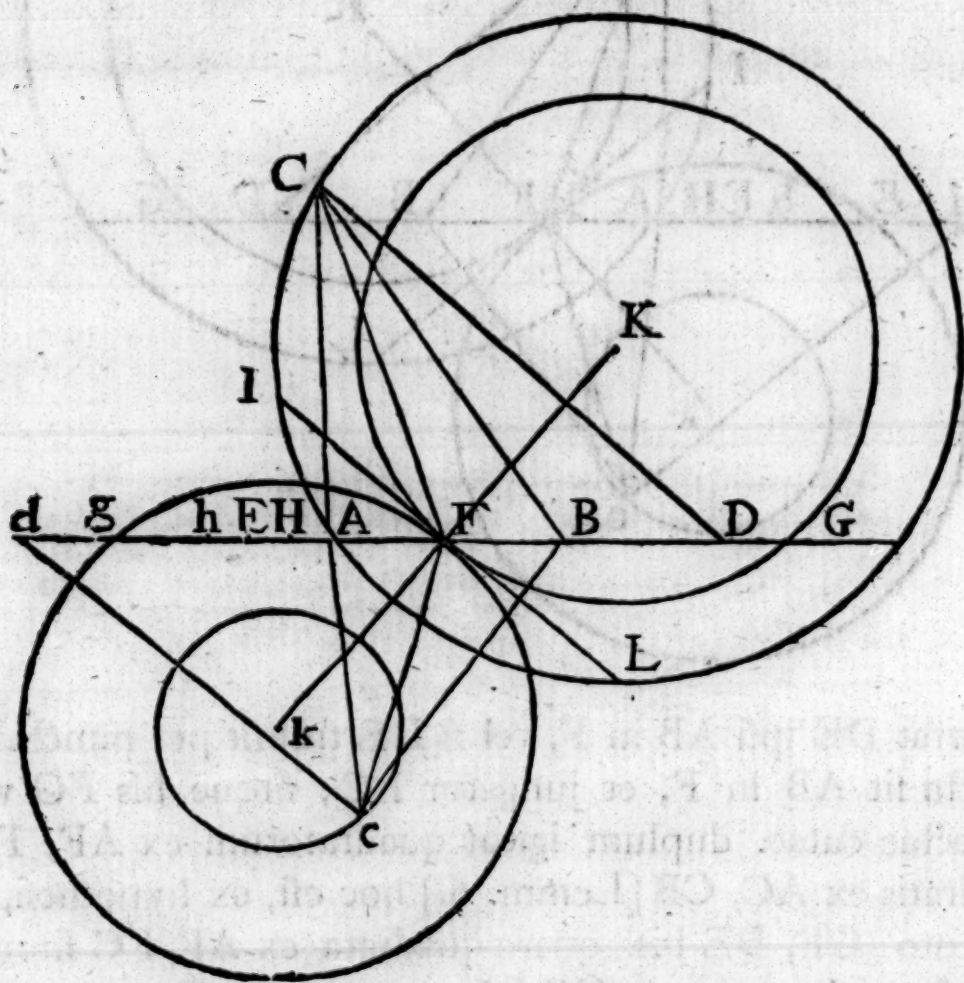
PROP. VI.

Quae 6ta est Lib. 2. Apollonii.

Si a duobus punctis datis inflectantur duae rectae lineae, a puncto autem [concurfus] ducatur recta parallela positione datae

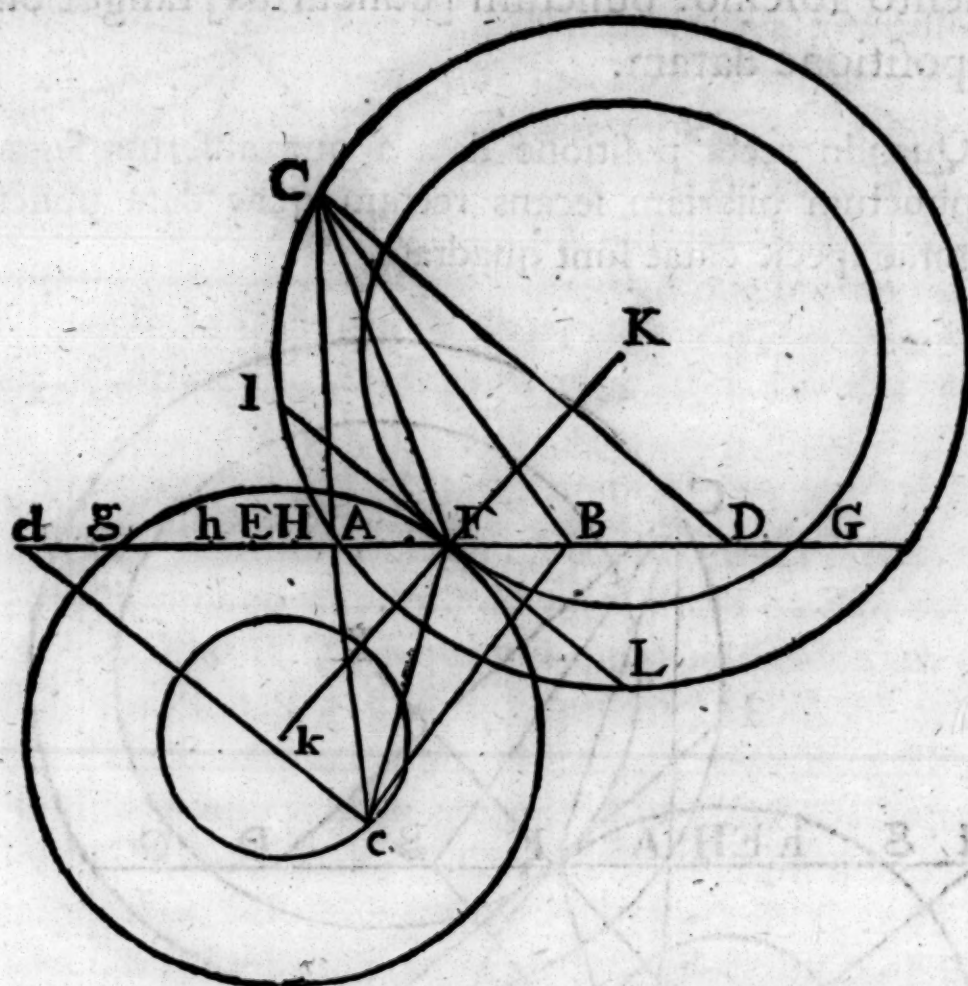
datae, auferens ab alia recta positione data segmentum dato puncto adjacens; ac fit summa figurarum, specie datarum, quae ab inflexis fiunt aequalis rectangulo contento data recta, et segmento abscisso: punctum [concurfus] tanget circumferentiam positione datam.

CAS. I. Quando recta positione data a qua aufertur segmentum transit per punctum bifariam secans rectam quae data puncta conjungit. et figurae specie datae sunt quadrata.



Sint A, B, puncta data, et, ab ipsis, inflexis AC, BC, ducatur CD parallela rectae positione datae, auferatque ex recta positione data quaeque per medium ipsius AB punctum transit, segmentum DE dato

dato puncto E adjacens; et sit summa quadratorum ex AC, BC aequalis rectangulo contento datâ rectâ et segmento DE. Tanget punctum C circumferentiam positione datam.

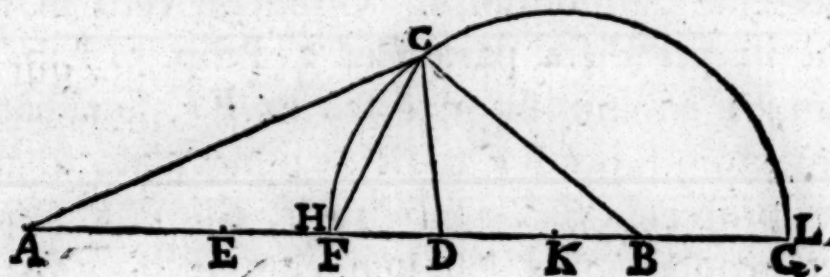


Occurrat DE ipsi AB in F, vel si DE transsit per puncta A, B, bifariam secta sit AB in F, et jungatur FC; sitque bis FG vel Fg aequalis rectae datae. duplum igitur quadratorum ex AF, FC aequale est quadratis ex AC, CB [Lemm. 6.] hoc est, ex hypothese, rectangulo contento GF, DE bis. quare quadrata ex AF, FC simul aequalia erunt rectangulo contento GF, DE. sit autem rectangulum contentum GF, EH aequale quadrato ex datâ AF; et propter datam FG dabitur EH, quae ponatur a puncto E versus D. datum autem est punctum E, quare datum est H. Quoniam vero quadrata ex AF, FC simul

mul aequalia sunt rectangulo contento GF, DE, quorum quadratum ex AF aequale est rectangulo GF, EH; erit reliquum quadratum ex FC aequale reliquo rectangulo GF, HD. ergo quoniam a dato puncto F ducta est FC, et a termino ejus C ducta est CD parallela positione datae auferens ex recta quae per punctum F transit segmentum DH dato puncto H adjacens, et est quadratum ex FC aequale rectangulo contento data recta FG, et ipsa DH; tanget punctum C circumferentiam positione datam per Cas. 1. aut 2. Prop. 3. Lib. 2. hujus.

Sit autem datum punctum E ad partes puncti F ad quas est A, (nam si ad partes contrarias fuerit compositio eodem prorsus modo fiet). et quoniam rectangulum GF, ED majus est contento GF, EH cadet punctum H inter E et D, seu D erit in EH producta ad partes H.

Et 1. Si incidat punctum H in ipsum F, hoc est, si quadratum ex



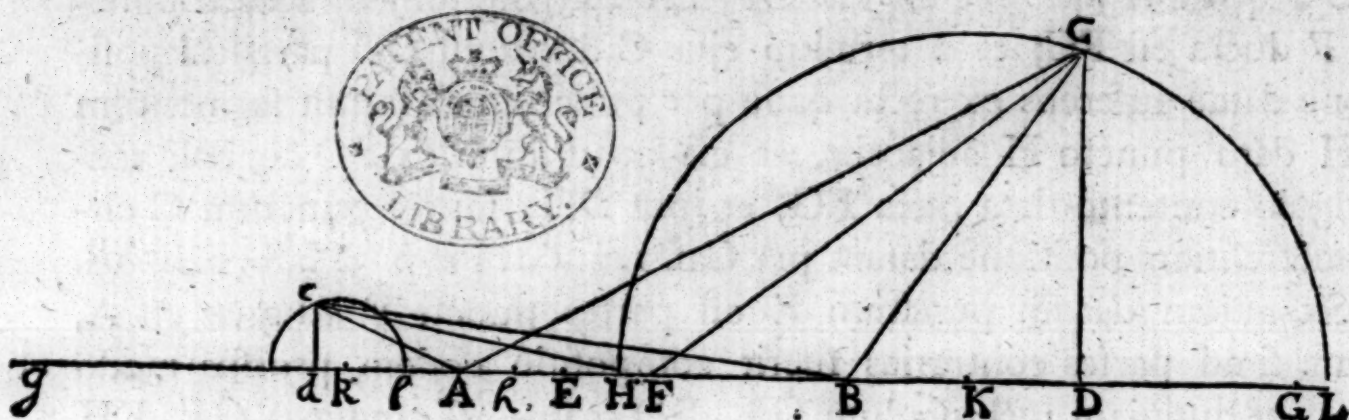
AF, aequale fuerit rectangulo GFE, et sumatur punctum H ad eas partes puncti E, ad quas est F, compositio fiet per Cas. 1. praedictae Prop. 3. quia sc. quadratum ex FC aequale est rectangulo GFD.

2. Si rectangulum GF, EH, hoc est, quadratum ex AF minus fuerit rectangulo GFE, et sumatur EH versus punctum F, cadet punctum D versus easdem partes, hoc est, vel inter H et F vel in HF producta ad partes F ad quas est B, nam ED major est EH; et propterea compositio fiet per priorem partem compositionis Cas. 2. Prop. 3. Lib. 2. hujus.

C c

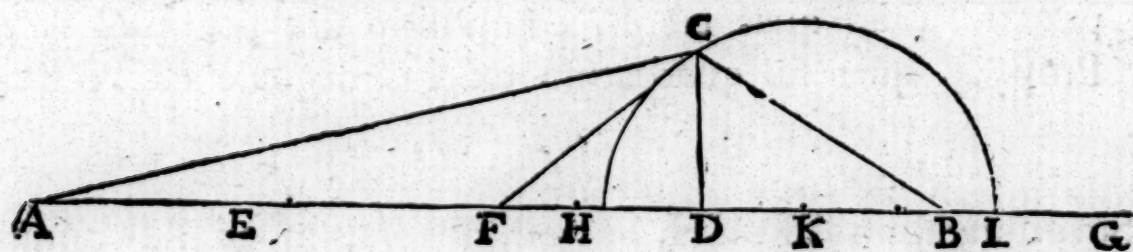
3. In

3. In alterutro ex hisce casibus in quibus sc. quadratum ex AF aequale aut minus est rectangulo GFE ; si fumatur Eh ad partes puncti



ti E contrarias iis ad quas est F , hoc est, si requiratur ut punctum d sit ad eas partes, quoniam quadratum ex FC aequale est rectangulo GF , dh compositio fiet per posteriorem partem ejus qui habetur in *Cas. 2. praedictae Propositionis*. Quoniam vero in hoc casu, ex determinatione in praedicta parte *Cas. 2. Prop. 3. Lib. 2.* requiritur ut rectangulum gFh minus sit quadrato ex Fk , semidiametro sc. circuli cujus segmentum super Fg capit angulum dato angulo cdF aequalem; debet propterea rectangulum gF , Eh una cum ipso gFE , hoc est, debet quadratum ex AF una cum rectangulo gFE minus esse quadrato ex Fk .

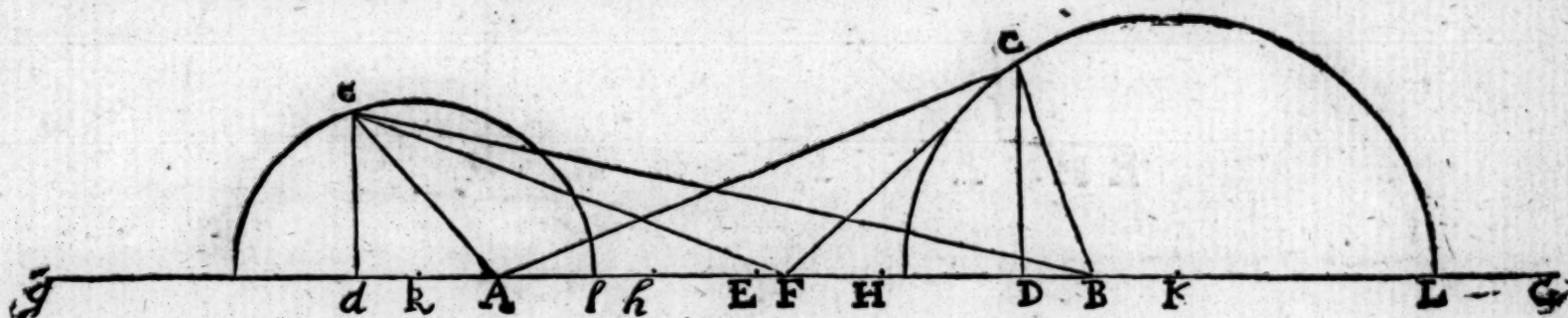
4. Si vero rectangulum GF , EH , hoc est, quadratum ex AF majus



fuerit rectangulo GFE , et fumatur EH versus punctum F , cadet punctum D versus easdem partes, hoc est, in FH producta ad partes H ; adeoque compositio fiet per posteriorem partem compositionis *Cas. 2. Prop. 3. Lib. 2. hujus.* et quoniam in hoc casu requiritur, ut
rectan-

rectangulum GFH minus sit quadrato ex FK semidiametro circuli cu-
jus segmentum super FG capit angulum dato angulo CDF aequalem;
debet propterea (addito sc. communi rectangulo GFE) rectangulum
GF, EH, hoc est, quadratum ex AF minus esse quadrato ex KF una
cum rectangulo GFE.

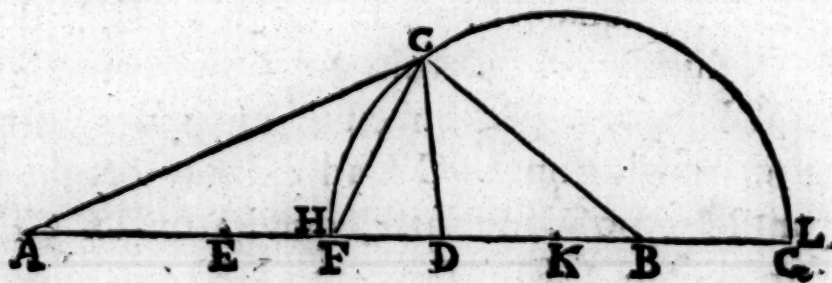
5. Et in hoc ultimo casu sc. in quo rectangulum GF, EH seu qua-



dratum ex AF majus est rectangulo GFE; si fumatur Eb ad partes
puncti E contrarias iis ad quas est F, compositio fiet et determinatio
eadem erit ut in praecedente articulo 3. dictum fuit.

Hisce praemissis quae distinguendis casibus, et determinationibus Lo-
ci necessaria sunt,

Componetur ita.

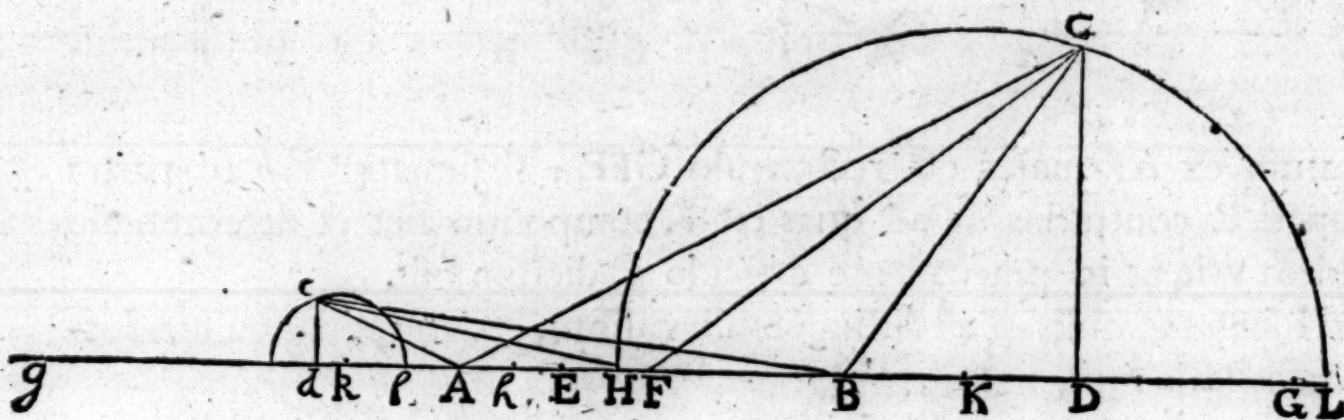
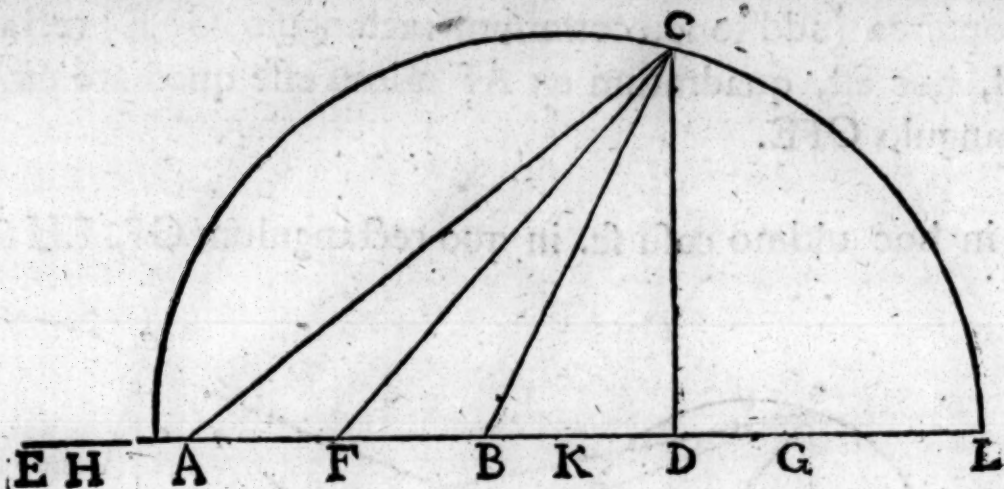


Sint A, B puncta data a quibus inflectendae sunt rectae, sitque E
aliud in AB punctum datum; et recta magnitudine data aequalis sit
duplo rectae M; secta vero AB bifariam in F, ipsis M et AF tertia

C c 2

proportionalis

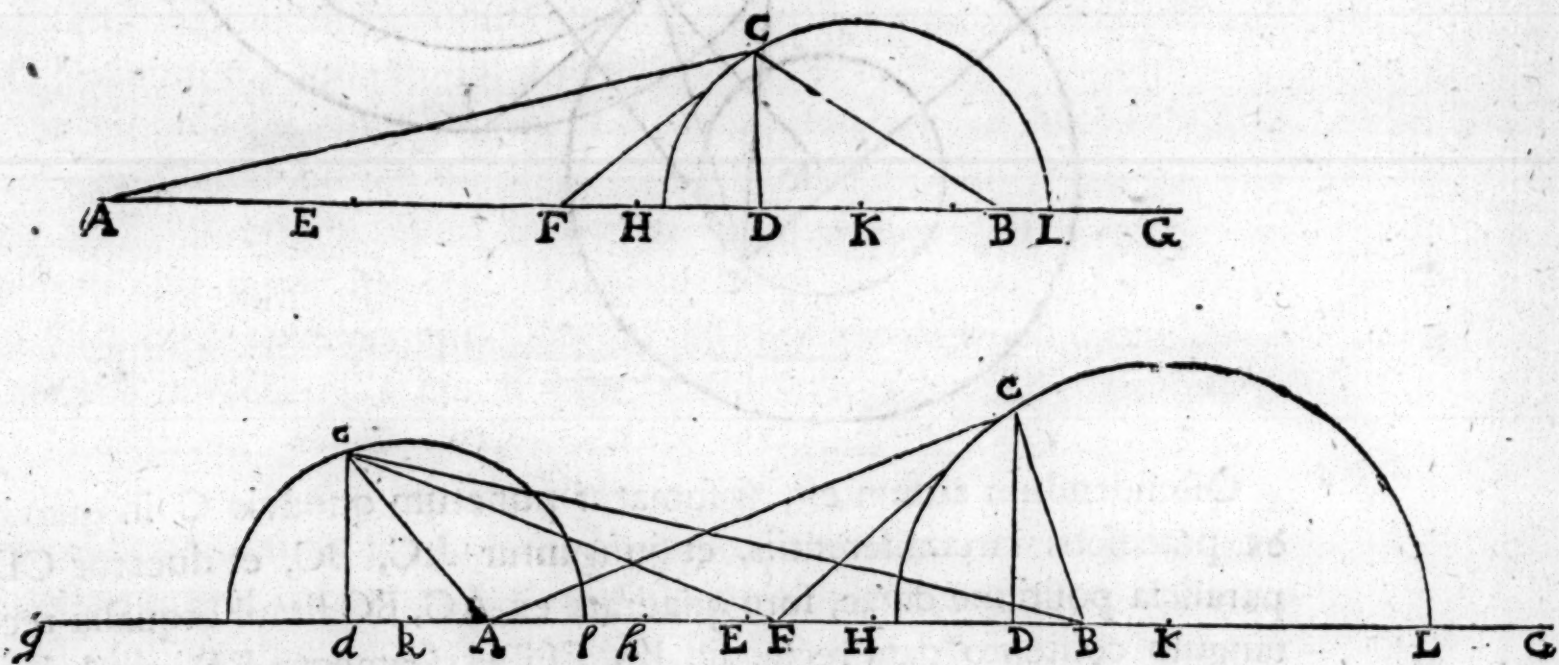
proportionalis inveniatur N . et si fuerit quadratum ex AF aequale rectangulo contento ipsis M , FE vel eodem minus, ponatur a punc-



to F , versus partes ad quas est B , ipsi M aequalis recta FG ; et versus easdem partes ponatur a puncto E recta EH aequalis ipsi N . et si quadratum ex AF aequale fuerit rectangulo GFE , describatur circulus CL , ille sc. duorum circulorum qui simul conficiunt Locum in Casu 1. Prop. 3. Lib. 2. hujus, qui est ad eas partes puncti F ad quas est B , a cuius sc. quovis puncto C si ad F ducatur recta CF , et ad FG ducatur CD parallelae positione datae, quadratum ex CF aequale erit rectangulo contento data GF , et segmento DF ; at si quadratum ex AF minus fuerit rectangulo GFE , ope compositionis prioris partis Cas. 2. ejusdem Propositionis describatur circulus CL a cuius quovis puncto C , si ducatur ad punctum F recta CF , et ab eodem ad FG ducatur CD parallela positione datae, quadratum ex CF aequale erit rectangulo contento

contento datâ GF, et segmento DH inter ductam CD et datum punctum H: circumferentia alterius horum, prout casus postulaverit, erit Locus quaesitus; et quidem sola, si quadratum ex AF una cum rectangulo GFE non minus fuerit quadrato ex KF semidiametro circuli cujus segmentum super FG capit angulum dato angulo CDF aequalem. at si quadratum ex AF una cum rectangulo GFE minus fuerit quadrato ex KF, fiat Fg aequalis ipsi FG, et Eh aequalis ipsi EH; et per partem posteriorem compositionis Casus 2. praedictae Prop. 3. describatur circulus Localis, eritque huius circumferentia simul cum altera ex prioribus quam casus postulat, Locus quaesitus.

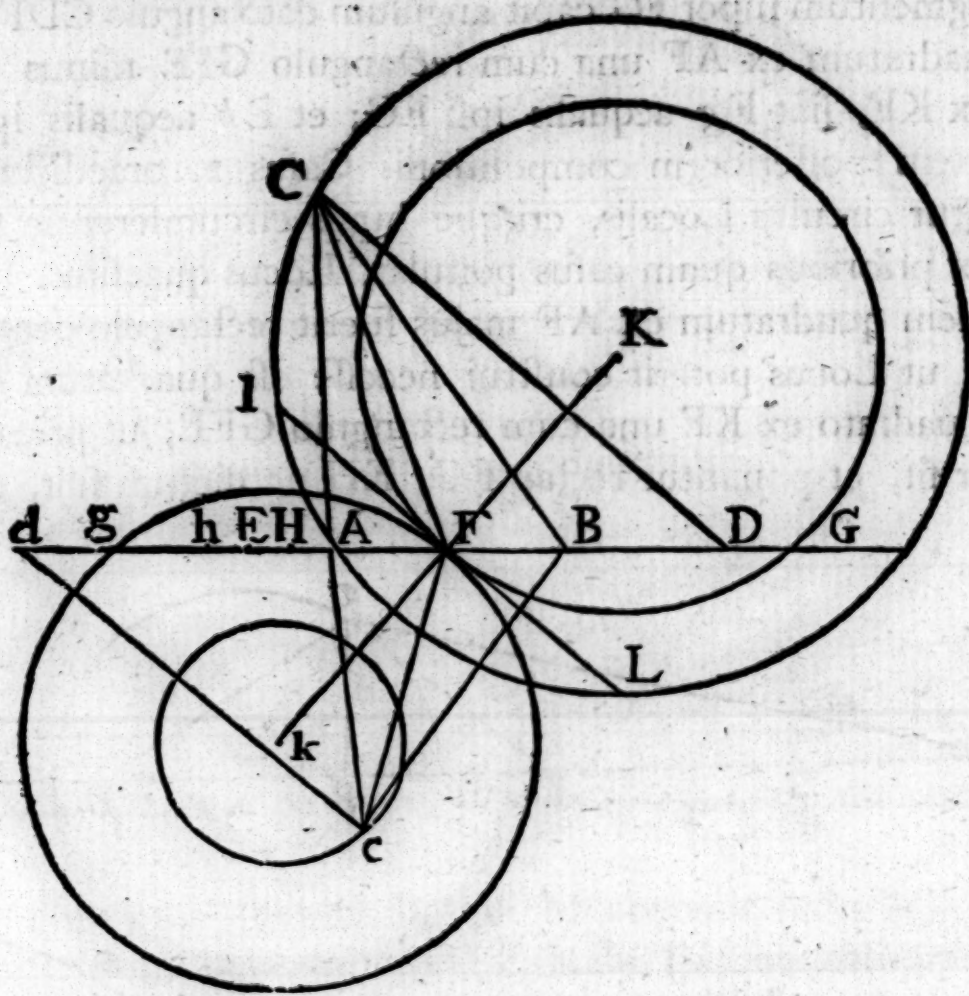
Si autem quadratum ex AF majus fuerit rectangulo contento rectis M, FE; ut Locus poterit construi necesse est quadratum ex AF minus sit quadrato ex KF una cum rectangulo GFE, ut prius ostensum. ita igitur sit, et ponantur rectae FG, EH ut dictum fuit, et per par-



tem posteriorem Cas. 2. Prop. 3. Lib. 2. huius describatur circulus Localis, erit huius circumferentia Locus quaesitus; et quidem sola, si quadratum ex AF una cum rectangulo GFE non minus fuerit quadrato ex KF. si autem minora fuerint spatia illa quadrato ex KF, fiat

Fg

Fg aequalis FG , et Eh aequalis EH , et per praedictam posteriorem partem Cas. 2. describatur circulus Localis puncto h conveniens, et utriusque circumferentia erit Locus quaesitus.

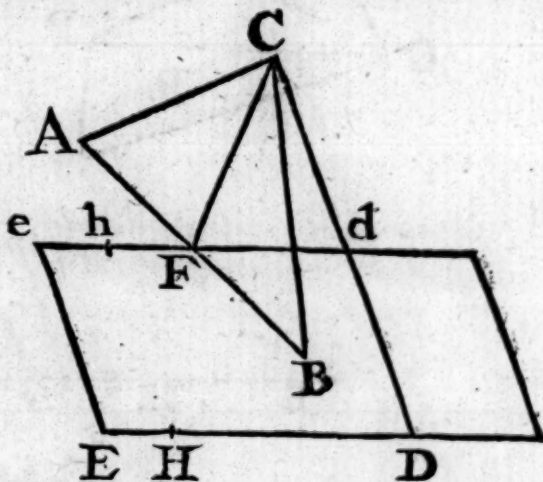


Ostendendum autem est, si sumatur punctum quodvis C in quavis ex praedictis circumferentiis, et jungantur AC, BC, et ducatur CD parallela positione datae, fore quadrata ex AC, BC simul aequalia rectangulo contento data recta, sc. bis FG et segmento ED quod dato puncto E adjacet. Ita autem in omnibus casibus ostendetur. ex constructione, ope sc. Prop. 3. facta, est quadratum ex FC aequale rectangulo contento GF, DH; est autem quadratum ex AF aequale rectangulo GF, EH; quadrata igitur ex AF, FC simul aequalia sunt rectangulo GF, ED. ergo duplum quadratorum ex AF, FC, hoc est, [Lemm.

[Lemm. 6.] quadrata ex AC, BC simul aequalia erunt rectangulo contento bis FG et ED.

CAS. 2. Quando recta positione data non transit per punctum bifariam secans AB, caeteris ut in praecedente manentibus.

Sint A, B puncta data, et ab ipsis inflexis AC, BC , ducatur CD parallela positione datae, auferatque ex alia positione data segmentum DE dato puncto E adjacens; et summa quadratorum ex AC, BC aequalis sit rectangulo contento datâ recta, bis sc. M et segmento DE . tanget punctum C circumferentiam positione datam.

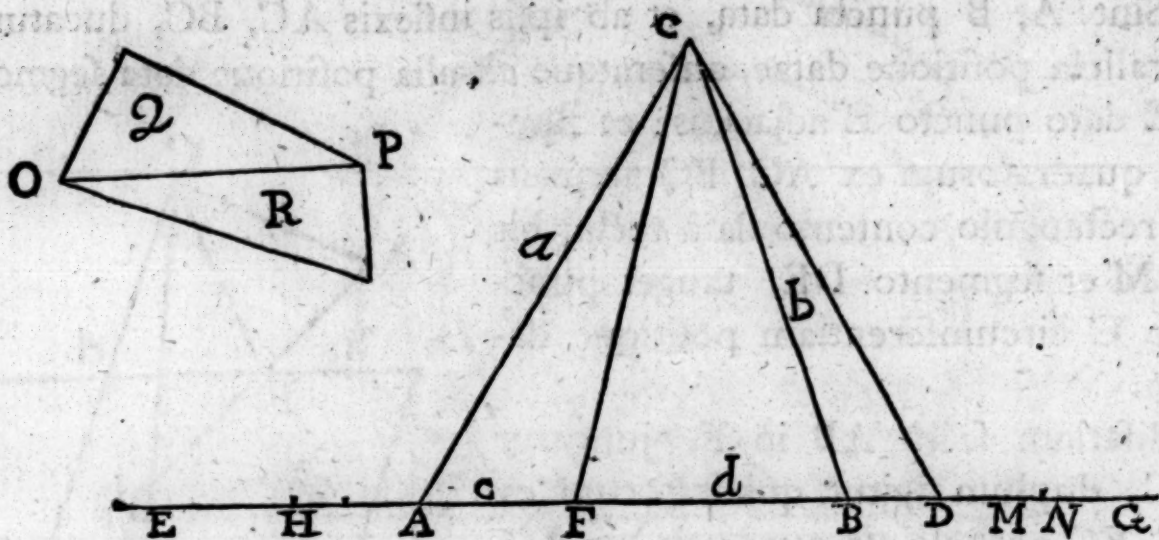


Bifariam sectâ AB in F, jungatur FC, duplum igitur quadratorum ex AF, FC aequale est quadratis ex AC, BC [Lemm. 6.] hoc est, ex hypothesi, rectangulo contento bis M, DE. quare quadrata ex AF, FC simul aequalia sunt contento M, DE. sit rectangulum contentum M, EH aequale quadrato ex AF, et reliquum quadratum ex FC aequale erit reliquo rectangulo M, DH. quoniam igitur a dato puncto F, ducta est FC, et a termino ejus C ducta est CD parallela positione datae auferens ex recta quae per F non transit segmentum DH dato puncto H adjacens, et est quadratum ex FC aequale rectangulo contento datâ rectâ M, et ipsa DH; tanget punctum C circumferentiam positione datam per Cas. 3. Prop. 3. Lib. 2. hujus. et facta constructione qua reducitur Casus ille tertius ad secundum, ostendetur hic Casus omnino ut praecedens.

CAS. 3. Quando figurae speciei datae non sunt quadrata, reliquis ut in alterutro praecedente manentibus.

Sint A, B puncta data, et inflexis ab ipsis AC, BC, ducta sit ad rectam positione datam recta CD parallela positione datae, auf-
rens

rens segmentum DE dato puncto E adjacens; et sit summa figurarum specie datarum quae ab ipsis AC , BC describuntur aequalis rectangulo contento datâ rectâ et segmento DE . tanget punctum C circumferentiam positione datam.



Sit a figura super AC descripta, et b ea quae super BC . Datae igitur sunt [49. dat.] rationes a ad quadratum ex AC , et b ad quadratum ex BC . ergo, quoniam positione et magnitudine data est AB , dabitur [Lemm. 9.] punctum dividens AB in duo segmenta, quae ad datam rectam, datas habebunt has rationes. sit punctum illud F , et FM data recta, ut sc. BF sit ad FM , ut a ad quadratum ex AC ; AF vero sit ad FM , ut b ad quadratum ex BC . et junctâ FC , erunt [Cor. Lemm. 10.] figurae a , b simul aequales spatio dato, et ei quod ad quadratum ex FC datam habet rationem, viz. quam habet AB ad FM . ex hypothesi vero figurae a , b simul aequales sunt rectangulo contento data rectâ, (quae sit FN) et segmento DE . rectangulum igitur FN , DE aequale est dato spatio, et ei quod ad quadratum ex FC datam habet rationem. sit datum illud spatium aequale rectangulo FN , EH . data igitur erit EH et punctum H . et reliquum rectangulum FN , DH aequale erit ei quod ad quadratum ex FC datam habet rationem. ut igitur DH ad FC , ita FC ad eam FG ad quam habet FN

FN datam rationem [56. dat.] et data est FN, quare et FG; rectangulum vero FG, DH aequale est quadrato ex FC. ergo, quoniam a dato puncto F ducta est FC, et a termino ejus C recta CD parallela positione datae, et est quadratum ex FC aequale rectangulo contento data recta FG, et segmento DH dato puncto H adjacente; tanget punctum C circumferentiam positione datam, per Prop. 3. Lib. 2. hujus.

Componetur vero ita.

Super eandem rectam OP sint figurae Q, R, quarum Q sit ea cui similis debet esse figura super AC, R vero cui similis super BC describenda est. et, per Lemm. 9. secetur AB in F, et inveniatur FM, ita ut BF sit ad FM, ut Q ad quadratum ex OP; AF vero sit ad FM, ut R ad quadratum ex OP. sit vero FN aequalis rectae datae, et fiat ut AB ad FM ita FN ad FG. super AF vero sit figura c similis ipsi Q, et super FB sit figura d similis ipsi R; ipsisque c, d simul aequale fiat rectangulum contentum FN, EH. per Propositionem vero 3. Lib. hujus 2. describatur circumferentia a cujus quovis puncto C, si ducatur ad punctum F recta CF, et ab eodem ad FG ducatur CD parallela positione datae, quadratum ex FC aequale erit rectangulo contento data FG et segmento DH inter ductam CD et datum punctum H. erit haec Locus quaesitus; hoc est, si jungantur AC, BC, et super ipsas describantur figurae a, b, quarum a similis sit ipsi Q; b vero ipsi R; erunt a, b simul aequales rectangulo contento data recta FN, et segmento DE. est enim, ex constructione, AB ad FM, ut (FN ad FG, hoc est, ut) rectangulum FN, DH, ad ipsum FG, DH, hoc est, ad quadratum ex FC. quare FN, DH rectangulum est id quod ad quadratum ex FC est ut AB ad FM. per Lemm. vero 10. figurae a, b, simul aequales sunt ipsis c, d, et insuper ei quod est ad quadratum ex FC ut AB ad FM. c vero una cum d, ex constructione, aequales sunt rectangulo FN, EH; quod vero ad quadratum ex FC est ut AB ad FM, rectangulum est FN, DH; ergo figurae a, b, simul aequales sunt rectangulis FN, EH; FN, DH; hoc est, rectangulo contento FN, DE.

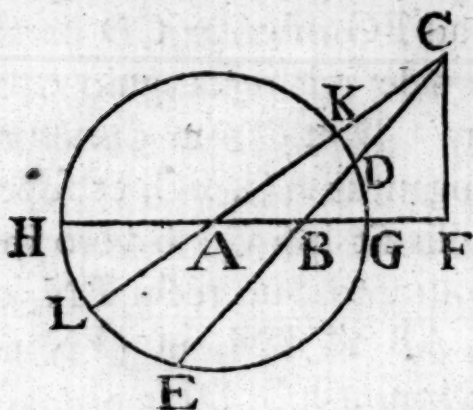
D d

Septi-

Septima Libri 2di Apollonii propositio quae habetur in praefatione Pappi Alexandrini, a Clariss. Halleio libris duobus de Sectione rationis praefixa pag. 39, est ut sequitur.

Si intra circulum positione datum detur punctum quodlibet, ac per idem ducatur recta quaevis, in qua sumatur punctum aliquod extra circulum: sit autem quadratum interceptae inter puncta illa aequale rectangulo sub tota et parte exteriori ad circulum terminata, vel soli vel etiam adjuncto rectangulo sub segmentis interioribus: punctum extra sumptum datam positione rectam continget.

Locus hic non solum in Commandini, Fermatii et Schootenii versionibus, sed etiam in Graeco textu Halleii, et ut videtur in ipsis codicibus manuscriptis omnino depravatus est. Nam non potest punctum inveniri extra circulum in quacunque recta per punctum datum, intra circulum, transeunte quod propositum in 2. Casu Propositionis



efficiet, nisi in ea sola quae ad rectos angulos est diametro quae per punctum datum intra circulum transit. Sit enim circulus positione datus cujus centrum A, et datum sit intra ipsum punctum B, per quod ducta sit quaevis recta BC, quae ad rectos angulos non sit diametro per B transeunte, nullum poterit esse in hac recta punctum quod faciet quadra-

tum ex segmento inter ipsum et punctum B aequale rectangulo contento segmentis inter ipsum et puncta D, E quibus recta BC circumferentiae occurrit simul cum rectangulo EBD contento segmentis interioribus. Nam si fieri potest, sit illud punctum C; et juncta AB et producta, ducatur ad ipsam perpendicularis CF, occurratque AB circulo in G, H, et AC jungatur circulo occurrens in K, L punctis. Quoniam igitur rectangulum LCK aequale est ipsi ECD [36. 3.] quadratum vero ex AK seu AG aequale est rectangu-

10 HBG, seu EBD, una cum quadrato ex AB; additis aequalibus, erit rectangulum LCK una cum quadrato ex AK, hoc est, erit quadratum ex AC aequale rectangulis ECD, EBD una cum quadrato ex AB; rectangula autem ECD, EBD simul aequalia sunt, ex hypothefi, quadrato ex BC; quare quadratum ex AC aequale est quadratis ex BC, AB, et propterea rectus est angulus ABC [48. 1.]. Non autem est rectus, quod fieri non potest. Nullum proinde est in BD punctum quod propositum in enunciatione hujus Loci efficiet. non igitur recte affirmat Fermatius ad initium Prop. 7. Lib. 2. Apollonii de Locis planis restituti, Operum variorum Math. pag. 42. secundam partem hujus Loci per additionem aequalium ex priore derivari facile posse, pars enim secunda contradictionem, ut ostensum est, involvit. Schootenius vero pag. 291. Exercit. Math. adducit Problema, quasi sensum hujus Apollonii Loci contineret, sed inscite omnino, nam apud illum recta transiens per datum intra circulum punctum, in qua supponit punctum extra circulum sumptum versari, positione data est, Normalis sc. diametro circuli per punctum intra ipsum datum transeunte, ut ostensum fuit. Minime autem intelligenda est Propositio de punctis quorum unumquodque invenitur in una eademque recta per datum intra circulum punctum transeunte, sed de punctis quorum unum aliquod invenitur in unaquaque recta quae per datum illud punctum transit, ut patet ex prima parte hujus Loci de cuius sensu nullum est dubium.

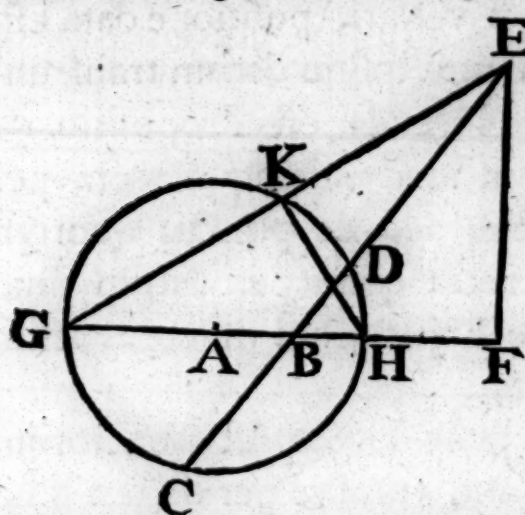
Quando autem accidit rectam lineam quae Locus est punctorum quae in rectis a dato puncto ductis sita sunt, transire per datum illud punctum in casu quodam particulari ex conditionibus Loci oriundo; vertitur tum iste Locus in Theorema, quod in Loco qui habetur in Prop. 9. sequente observare licet, Locus enim ille in uno casu vertitur in Propositionem Schootenii.

Inveni autem errorem in textum Graecum irrepsisse, nam vice verborum ἢ τῷ μόνῳ, ἢ τῷ τε καὶ τῷ ὑπὸ scribi debet ἢ τὸ μόνον ἢ τῷ τε καὶ τὸ ὑπὸ, quibus mutatis Locus erit ut sequitur.

Propositio quae septima est Lib. 2di Apollonii.

Si intra circulum positione datum detur punctum aliquod, ac per idem ducatur recta quaevis, et in ipsa sumatur punctum aliquod extra circulum; fit autem quadratum ex recta inter puncta illa intercepta aequale rectangulo contento tota et parte exteriori ad circulum terminata; vel solum sc. quadratum, vel etiam quadratum hoc simul cum rectangulo contento segmentis duobus interioribus: punctum extra sumptum tanget rectam positione datam.

Pars I. Sit circulus positione datus cujus centrum A, datumque sit intra illum punctum B per quod ducatur quaevis recta occurrens



circumferentiae in C, D punctis, et in CD extra circulum producta sit punctum E faciens quadratum ex EB aequale rectangulo CED: tanget punctum E rectam positione datam.

Jungatur AB et producat, et ad ipsam a puncto E ducatur perpendicularis EF, occurratque AB circulo in G, H punctis, juncta vero GE occurrat eidem in K, et jungatur HK. Quoniam igitur quadratum ex GE aequale est quadratis ex GF, FE; erunt [2. 2.] rectangula EGK, GEK simul aequalia rectangulis FGH, GFH et quadrato ex FE, quorum rectangula EGK, FGH sunt inter se aequalia (puncta enim F, H, K, E propter angulos rectos ad F, K sunt in circulo) ergo reliquum GEK rectangulum aequale est rectangulo GFH una cum quadrato ex FE. Est autem GEK aequale rectangulo CED, hoc est, ex hypothese, quadrato ex BE, hoc est quadratis ex BF, FE; quadrata

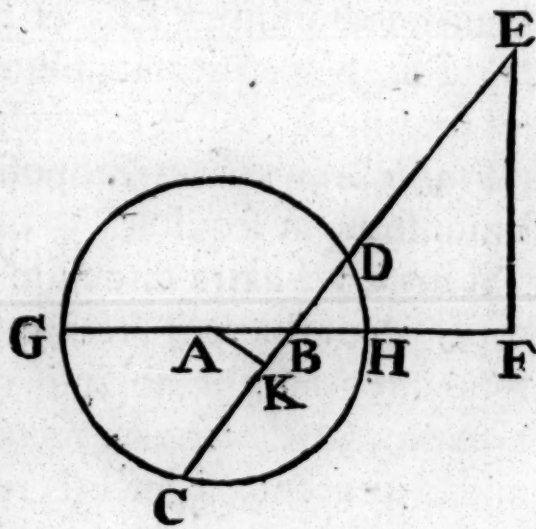
quadrata igitur ex BF, FE simul aequalia sunt rectangulo GFH et quadrato ex FE; quare quadratum ex BF, rectangulo GFH est aequale; et dempto communi rectangulo BFH, erit reliquum HBF rectangulum aequale reliquo contento sc. ipsis GB, HF. Ut igitur HB ad BG, ita est HF ad FB, et datae sunt HB, BG, quare data est ratio HF ad FB, et data est BH, quare [5. 2. dat.] data est BF, et punctum F; ergo et FE positione data est [29. dat.].

Componetur vero ita.

Per A, B puncta ducatur recta circulo occurrens in G, H, et ut GB ad BH, ita fiat BF ad FH, et per F ducatur recta perpendicularis ad BF; erit haec Locus quaesitus, hoc est, si in ipsa sumatur, punctum quodvis E, et jungatur EB circulo occurrens in D, C; erit quadratum ex BE aequale rectangulo CED. nam quoniam ex constructione est GB ad BH, ut BF ad FH, erit rectangulum FBH aequale contento GB, FH; addatur commune rectangulum BFH, et quadratum ex BF aequale erit rectangulo GFH; igitur quadratum ex BF simul cum quadrato ex FE, hoc est, quadratum ex BE, aequale erit rectangulo GFH et quadrato ex FE, hoc est, rectangulo GEK, seu CED, ut in analysi ostensum fuit. idem demonstratur in Prop. 159. Lib. 7. Pappi Alexand.

Pars II. Sit jam quadratum ex BE simul cum rectangulo CBD, aequale rectangulo CED, reliquis manentibus: tanget punctum E rectam positione datam.

Iisdem enim constructis, quoniam quadratum ex BE simul cum rectangulo CBD aequale est rectangulo CED; erunt quadrata ex BF, FE simul cum rectangulo GBH [35. 3.] aequalia rectangulo CED, hoc est, rectangulo GFH una cum quadrato ex FE, auferatur commune



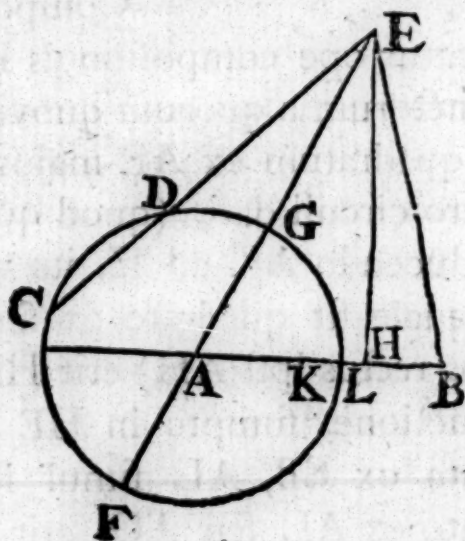
quadra-

dratum illud spatio dato majus aut minus fuerit rectangulo praedicto: vel si quadratum et rectangulum simul sint aequalia dato spatio, dummodo in hoc ultimo casu recta a dato puncto ducta occurrat circulo, et in ipsa sumatur punctum intra ipsum: punctum sumptum tanget rectam positione datam. dividi autem poterit in quatuor propositiones sequentes quarum prima sit,

PROP. VII.

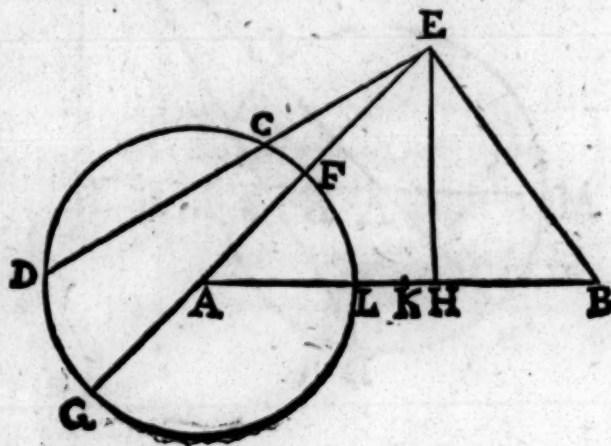
Cujus una pars eadem est cum parte 1. Prop. 7. Lib. 2. Apollonii.

SIT circulus positione datus cujus centrum A, datumque sit intra vel extra ipsum punctum B, per quod ducatur quavis recta, et in ipsa extra circulum sit punctum E, a quo ducta EDC ad circulum, sit quadratum ex BE aequale rectangulo CED: tanget punctum E rectam positione datam.



Jungatur AB et AE quae occurrat circulo in F, G punctis. Quoniam igitur quadratum ex EB aequale est rectangulo CED, hoc est, [36. 3.] rectangulo FEG, addito communi quadrato ex AG; erunt quadrata.

est, si AL major sit LB, quoniam AB bifariam secta est in K, erit [8. 2.] quadratum ex BK, KL tanquam ex una linea, hoc est, erit quadratum ex AL majus rectangulo BKL quater; est autem rectangulum contentum KH et AB bis, hoc est, rectangulum BKH quater aequale quadrato ex AL; quare BKH quater majus est rectangulo BKL quater, ideoque est KH recta major KL, et punctum H cadet extra circulum. Si vero AL minor sit LB, hoc est, si punctum K sit extra circulum, manifestum est punctum H quod in LK producta situm est, extra eundem esse. quoniam vero, in casu quo punctum B est extra circulum, quadratum ex AL minus est quadrato ex AB, erit rectangulum BKH quater minus quadrato ex KB quater, et propterea erit recta KH minor ipsa KB, et punctum H cadet inter L et B puncta.



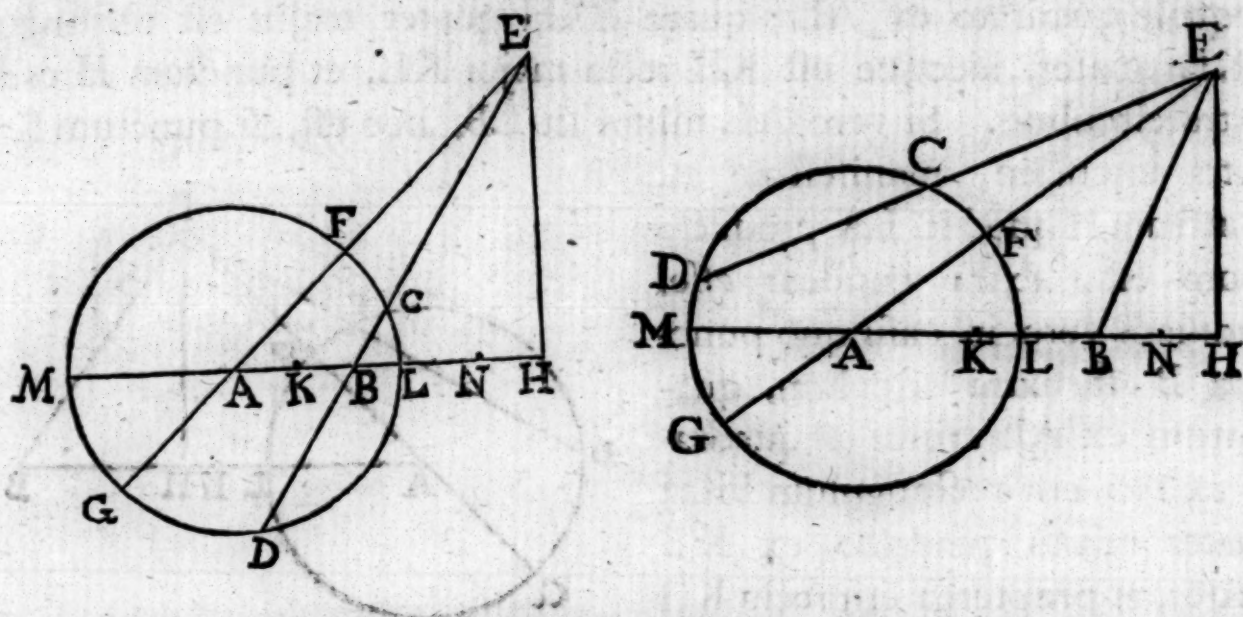
PROP. VIII.

Cujus una pars vice est 2. partis Prop. 7. Lib. 2. Apollonii.

JAM sit datum punctum B intra vel extra circulum, per quod ducatur quaevis recta: et in ipsa, extra circulum, sit punctum E a quo ducta ECD ad circulum, sit quadratum ex BE simul cum spatio dato P aequale rectangulo CED: tanget punctum E rectam positione datam.

Jungatur AB, occurrens circulo in M, L, et AE quae occurrat circulo in F, G punctis; quoniam igitur quadratum ex EB una cum
E e
spatio

spatio dato P aequale est rectangulo CED, hoc est, ipsi FEG, addatur quadratum ex AL seu AG, et quadratum ex EB una cum spatio dato P, et quadrato ex AL aequale erit quadrato ex AE, quod prop-



terea excedit quadratum ex BE dato spatio, spatio sc. P et quadrato ex AL simul. Quare, per Prop. 1. Lib. 2. hujus, tangit punctum E rectam positione datam.

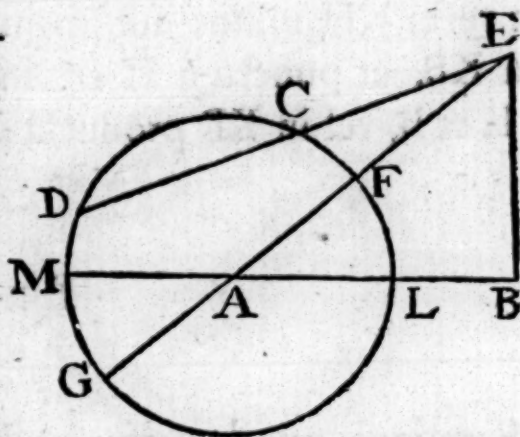
Componetur vero ita,

Sumatur AN quae poterit spatium P et quadratum ex AL simul; et bifariam secta AB in K, producatu AK ad H, ita ut rectangulum contentum AB et KH bis, hoc est, rectangulum BKH quater aequale sit quadrato ex AN, et ducatur HE ad angulos rectos ipsi AH; erit haec locus quaesitus: nam sumpto in ipsa quovis puncto E, et iunctis AE, BE; erit per Prop. 1. Lib. 2. hujus, summa quadratorum ex BE, AN aequalis quadrato ex AE, hoc est, ex constructione, erunt quadrata ex BE, AL una cum spatio dato P aequalia quadrato ex AE; et ablato quadrato ex AL seu AF, erit quadratum ex BE una cum spatio dato P aequale rectangulo FEG, hoc est, ipsi CED.

Punctum autem H, et propterea recta HE semper extra circum-
cadet

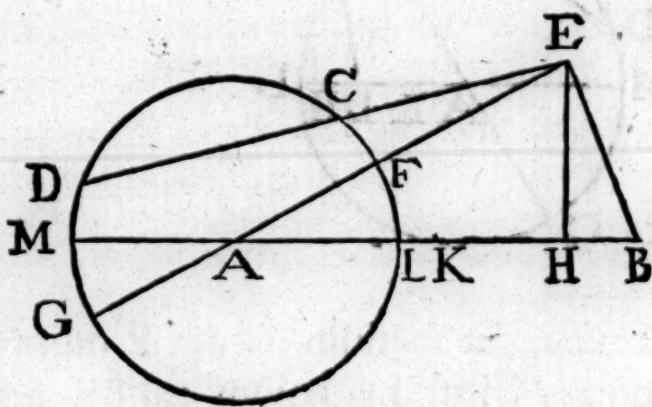
cadet sc. in casu in quo punctum K est intra circulum; hoc enim patet si K fuerit extra circulum. est enim rectangulum BKH quater majus quadrato ex AL, hoc est, ex BK et KL tanquam una linea. Multo igitur [8. 2.] majus est rectangulum BKH quater rectangulo BKL quater; ideoque et KH major est KL.

Existente autem puncto B extra circulum, si spatium datum P aequale fuerit rectangulo MBL contento sc. segmentis inter B et circumferentiam, erit quadratum ex BE una cum rectangulo MEL et quadrato ex semidiametro AL, hoc est, erunt quadrata ex BE, BA simul aequalia quadrato ex AE; ideoque est angulus ABE rectus [48. 1.], et recta BE positione dabitur, unde Locus in hoc casu vertitur in Theorema sequens, viz.



Si a puncto B extra circulum ducatur recta diametro MAL quae per B transit ad rectos angulos, et a quovis in ipsa puncto E ducatur quaevis EDC circulo occurrens in C, D punctis; erit quadratum ex BE una cum rectangulo MBL aequale rectangulo CED. Quadrata enim ex EB, BA simul aequalia sunt quadrato ex AE, quorum quadratum ex LA aequale est quadrato ex AG; reliquum igitur quadratum sc. ex BE una cum rectangulo MBL, aequale est reliquo rectangulo FEG seu CED.

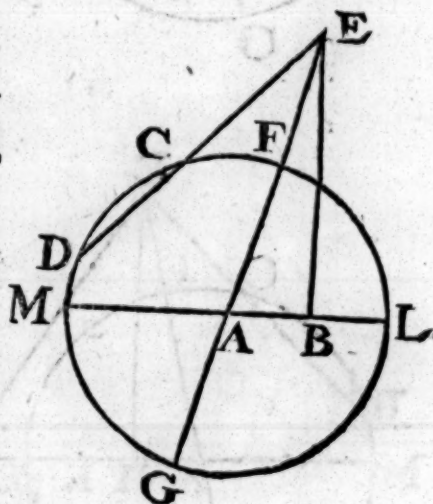
Si autem in casu quo punctum B est extra circulum, fuerit spatium datum P minus rectangulo MBL cadet recta EH inter L et B. Sin majus fuerit datum spatium eo rectangulo, cadet EH in LB productam versus B. quoniam enim rectangulum BKH quater aequale



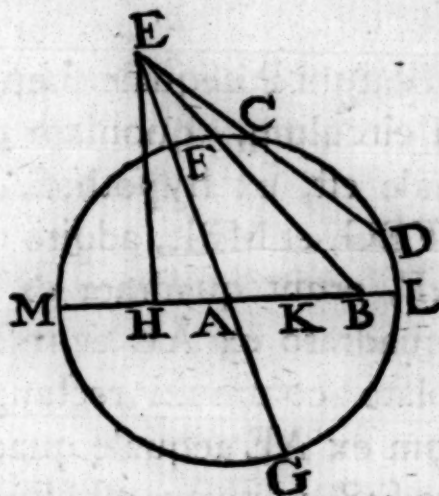
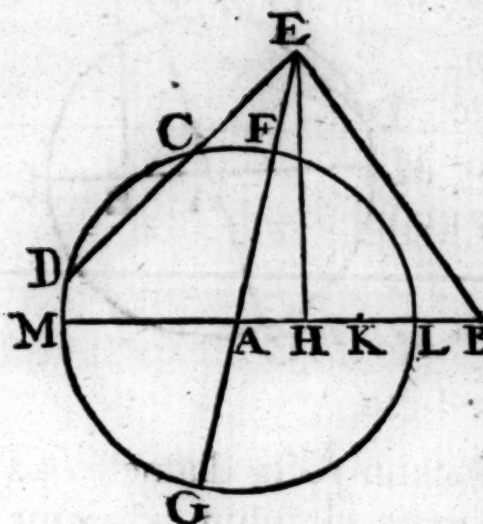
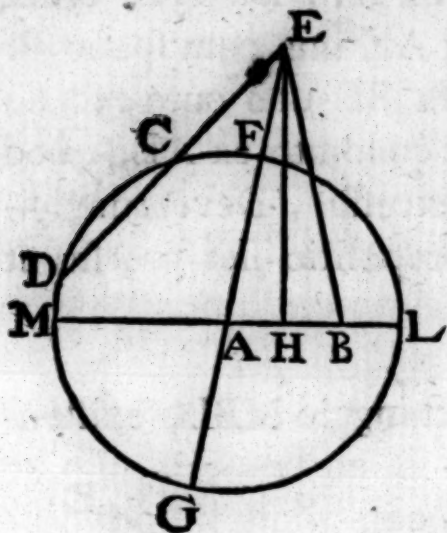
E e 2

est,

Si autem spatium datum P aequale fuerit rectangulo MBL, existente puncto B intra circulum, quoniam quadratum ex BE aequale est, ex hypothefi, rectangulis CED, seu FEG, et MBL, addito quadrato ex AL seu AF, erunt quadrata ex BE, AL simul aequalia quadrato ex AE et rectangulo MBL, et ablato communi rectangulo MBL, erit quadratum ex AE aequale quadratis ex BE, BA, quare [48. i.] rectus est angulus ABE, et recta BE positione dabitur. Unde Locus in hoc casu vertitur in sequens Theorema, viz.



Secundo, Sit spatium datum P aequale quadrato ex femidiametro.



AL seu AF ; erit igitur quadratum ex BE
aequale quadrato ex AE, et recta BE ipsi
AE. Quare tanget punctum E rectam po-
sitione datam, quae sc. ad rectos angulos est
ipsi AB, eamque bifariam dividit, per Cas.
1. Prop. 2. Lib. 2. hujus.

Tertio, Sit spa-
tium datum P
majus quadrato
ex semidiametro,
sitque ipsorum
excessus spatium
Q. Quoniam igitur
quadratum ex
BE aequale est
rectangulo FEG
una cum quadra-
to ex semidiametre

tro AF et spatio Q erit quadratum ex BE
aequale quadrato ex AE et spatio Q: tan-
git propterea punctum E rectam positione
datam per Prop. 1. Lib. 2. hujus, et compo-
sitio fiet ut in praecedente Prop. 8. Recta

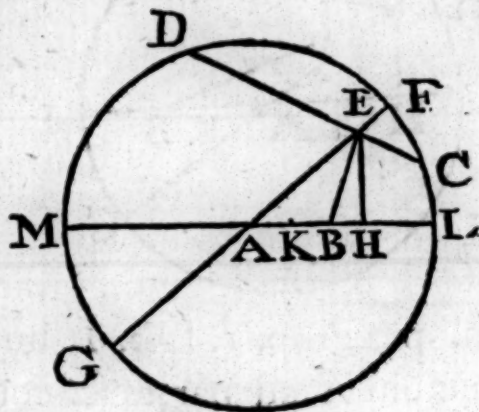
autem KH ponenda est versus punctum A, ad partes sc. contrarias eis
ad quas in praecedentibus posita fuit.

PROP.

PROP. X.

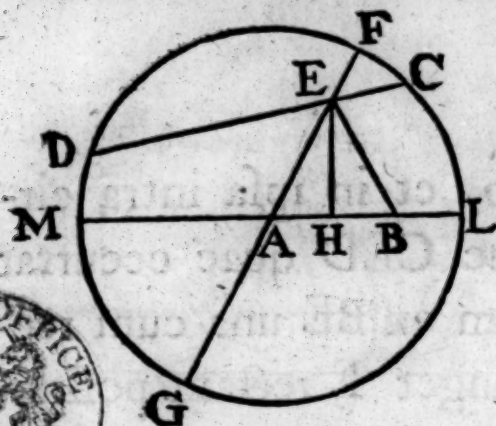
Denique occurrat recta BE circulo, et in ipsa intra circulum sumatur punctum E, ductaque CED quae occurrat circulo in C, D punctis, sit quadratum ex BE una cum rectangulo CED aequale dato spatio: tanget E rectam positione datam.

Jungatur AB quae occurrat circulo in M, L et AE occurrens eidem in F, G punctis. et primo, sit spatium datum P minus quadrato ex semidiametro, sitque ipsorum excessus spatium Q; et quoniam quadratum ex BE una cum rectangulo CED seu FEG aequale est spatio P, addito communi quadrato ex AE, erit quadratum ex BE una cum quadrato ex AG seu AL aequale quadrato ex AE una cum spatio P. et ablato spatio P, erit quadratum ex BE una cum spatio Q aequale quadrato ex AE. ergo tangit punctum E rectam positione datam per Prop. 1. Lib. 2. hujus; ex cujus compositione patet rectam EH, quae Locus est, cadere in AK productam versus partes puncti K quo sc. bifariam secta est AB; ita ut rectangulum BKH quater aequale sit spatio dato Q; requiritur vero ut cadat intra circulum, hoc est, inter K et L; oportet igitur ut rectangulum BKH quater minus sit rectangulo BKL quater, hoc est, ut spatium Q, seu excessus quadrati ex AL supra spatium P, minor sit [8. 2.] excessu ejusdem quadrati ex AL supra quadratum ex BL. Oportet igitur spatium datum P majus esse quadrato ex BL.



Secundo,

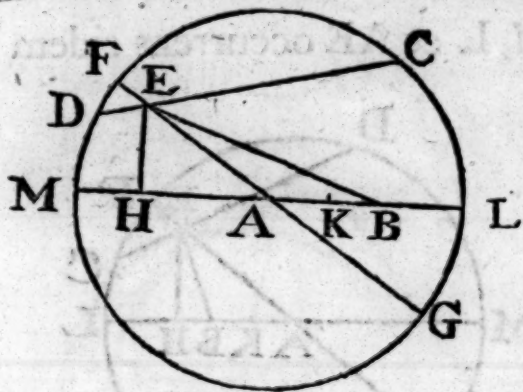
Secundo, Sit spatium datum P aequale quadrato ex semidiametro



AL seu AG; erit igitur quadratum ex BE una cum rectangulo CED seu FEG aequale quadrato ex AG, et ablato communi rectangulo FEG, erit quadratum ex BE aequale quadrato ex AE, et recta BE aequalis ipsi AE. quare tangit punctum E rectam positione datam, quae sc. bifariam et ad rectos angulos dividit ipsam AB, per Cas. 1. Prop. 2. Lib. 2. huj.



Tertio, sit spatium P majus quadrato ex semidiametro AL seu AG,



fitque eorum excessus spatium Q . Quoniam igitur quadratum ex BE una cum rectangulo CED, seu FEG aequale est (spatio P , hoc est) quadrato ex AG una cum spatio Q . ablato communi rectangulo FEG, erit quadratum ex BE aequale quadrato AE et spatio Q ; ergo tangit punctum E rectam positione da-

tam, per Prop. 1. Lib. 2. hujus. recta autem KH ponenda est versus punctum A ad partes sc. contrarias iis ad quas in primo casu posita fuit. Compositiones autem horum trium manifestae sunt.

Est et alia Propositio generalis praecedenti similis. sc. Si intra vel extra circulum positione datum detur punctum aliquod, ac per idem ducatur recta quaevis circulo occurrens, et in ipsa sumatur punctum aliquod intra circulum; sit autem quadratum ex recta inter puncta illa intercepta aequale rectangulo contento segmentis inter punctum sumptum et circulum: vel si quadratum illud majus aut minus fuerit praedicto rectangulo, dato spatio, vel si in recta a dato puncto utcunque ducta, sumatur punctum extra circulum; fueritque quadratum et rectangulum simul aequalia dato spatio: tanget punctum sumptum circumferentiam positione datam.

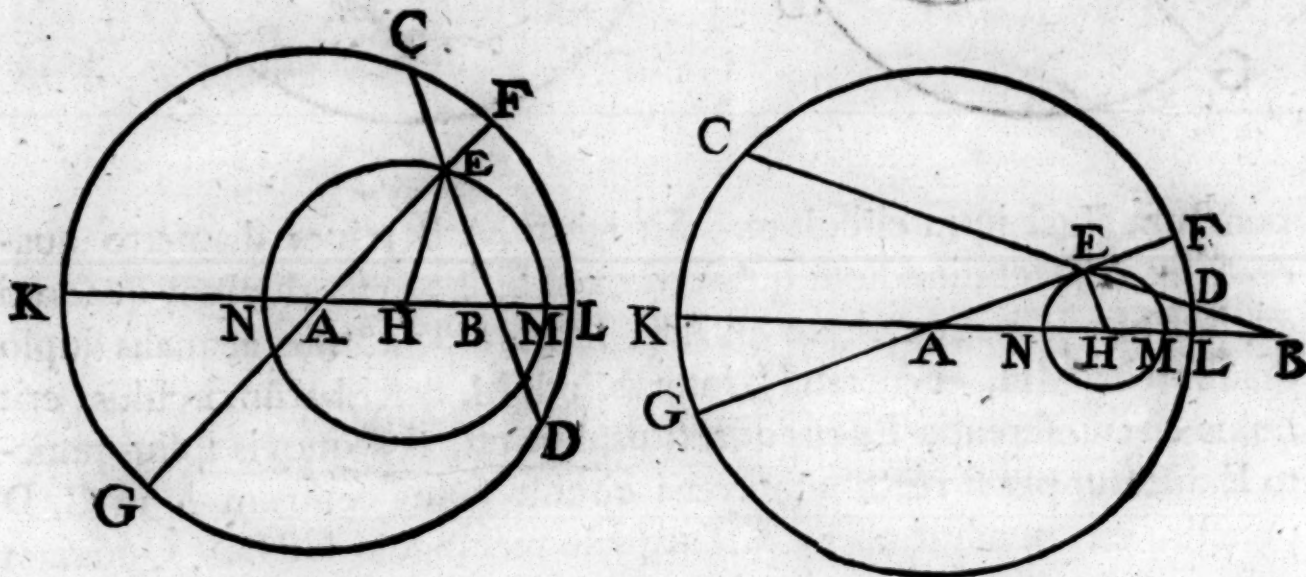
Haec etiam in quatuor propositiones dividitur quarum prima est,

P R O P.

PROP. XI.

SIT circulus positione datus cujus centrum A, datumque sit intra vel extra ipsum punctum B per quod ducatur quævis recta circulo occurrens in C, D punctis; et in CD intra circulum sit punctum E faciens quadratum ex EB æquale rectangulo CED: tanget punctum E circumferentiam positione datam.

Jungatur AB, et AE quæ occurrat circulo in F, G punctis. Quo-



niam igitur quadratum ex EB æquale est rectangulo CED, hoc est, ipsi FEG, [35. 3.] addito communi quadrato ex AE, erunt quadrata ex AE, EB simul æqualia quadrato ex AG; datum autem est quadratum ex AG: ergo tangit punctum E circumferentiam positione datam, per Cas. 1. Prop. 5. Lib. 2. hujus.

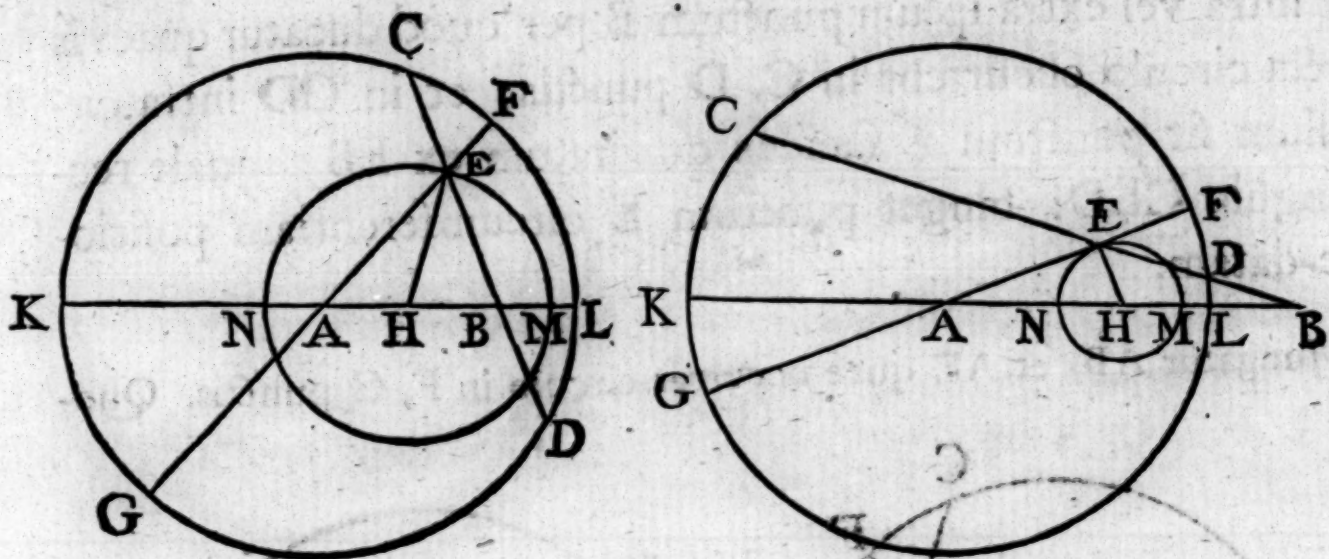
Componetur vero ita.

Bisariam sectâ AB in H, et productâ ad circulum in K, L, manifestum est, ex determinatione Prop. 5. hujus, oportere duplum quadrati ex

F f

AH

AH minus esse spatio dato, hoc est, quadrato ex AK; quare quadruplum quadrati ex AH, hoc est, quadratum ex AB, minus debet esse duplo quadrati ex AK; ideoque recta AB, minor debet esse diametro quadrati cujus latus est AK, quod quidem necessario fiet in Casu in quo



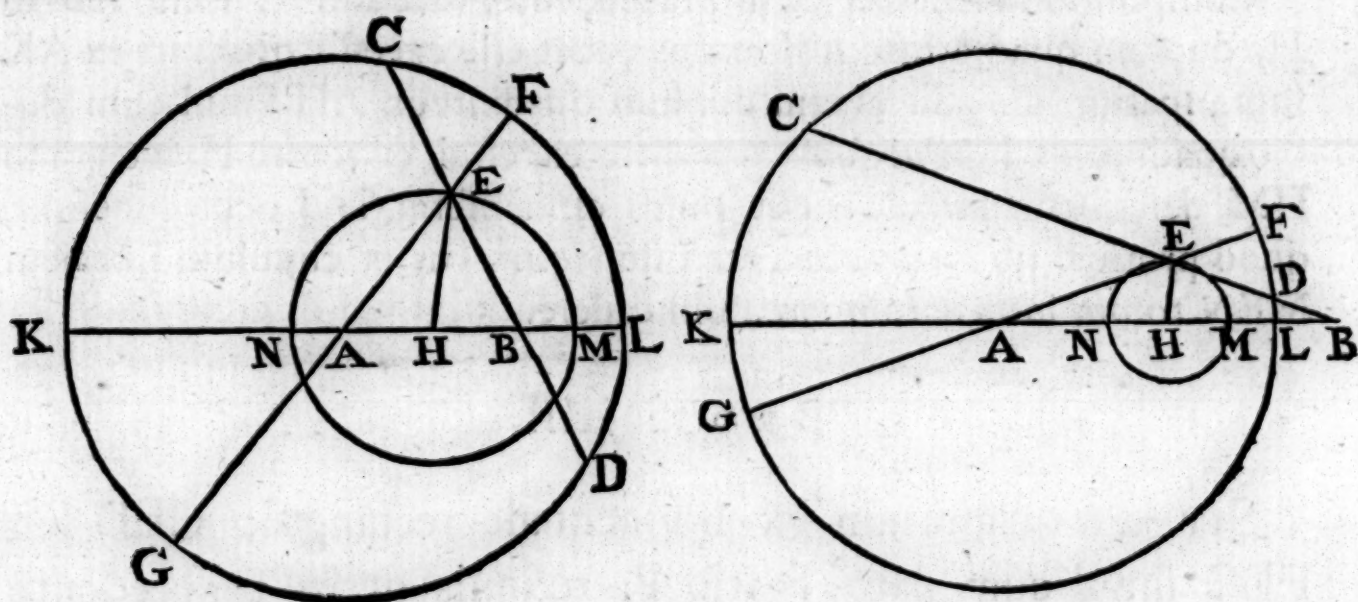
punctum B est intra circulum. Sit igitur AB minor diametro quadrati ex AK, et dimidium quadrati ex AB, hoc est, duplum quadrati ex AH minus erit quadrato ex AK; sit horum excessus aequalis duplo quadrati ex MH, et centro H, intervallo HM, describatur circulus, erit hujus circumferentia Locus quaesitus, hoc est, si a quovis ipsius puncto E ducatur per B recta occurrens circulo cujus centrum A in C, D punctis, erit quadratum ex EB aequale rectangulo CED. Quoniam enim, ex constructione, circulus centro H descriptus est is cujus circumferentia est Locus in Cas. 1. Prop. 5. descriptus, erunt quadrata ex AE, BE simul aequalia quadrato ex AK seu AG, et ablato quadrato ex AE, erit quadratum ex EB aequale rectangulo FEG, hoc est, ipsi CED.

Idem autem de punctis M, N in quibus Locus occurrit rectae AB ita ostenditur; quoniam AB bifariam secta est in H, quadrata ex AM, MB simul aequalia sunt [9. aut 10. 2.] duplo quadratorum ex AH, HM, hoc est, quadrato ex AK; quare ablato quadrato ex AM, erit quadratum

tum ex MB aequale rectangulo LMK. et similiter ostendetur quadratum ex NB aequale rectangulo LNK. Et quoniam quadrata ex AM, MB simul aequalia sunt quadrato ex AK, erit AM minor AK, quare circulus Localis NEM totus intra circulum datum cadit, hoc est, punctum E semper intra eundem erit.

PROP XII.

JAM sit datum punctum B intra vel extra circulum, et per illud ducatur quaevis recta circulo occurrens in punctis C, D; et in ipsa intra-circulum sumatur punctum E; sitque quadratum ex BE simul cum dato spatio P aequale rectangulo CED seu FEG: tanget punctum E circumferentiam positione datam.

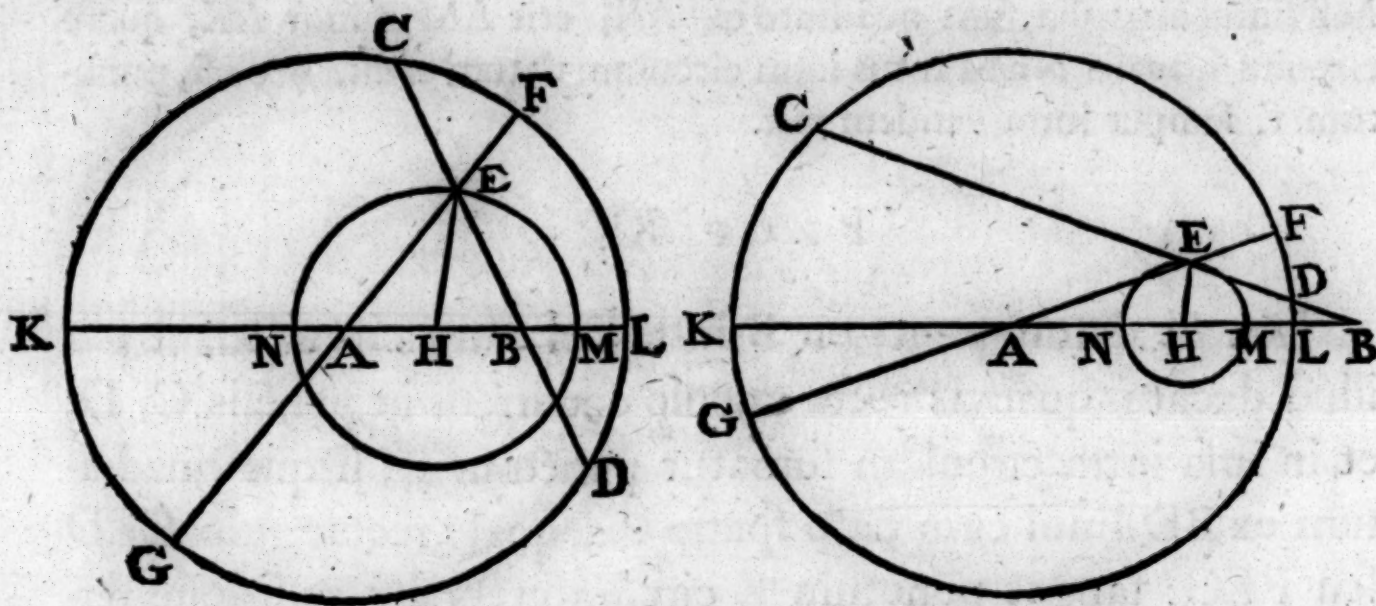


Quoniam enim quadratum ex BE simul cum spatio P, aequale est rectangulo FEG; addito communi quadrato ex AE erunt quadrata ex BE, EA simul cum spatio P aequalia quadrato ex AG seu AK; et ablato utrinque spatio P, erunt quadrata ex BE, EA simul aequalia dato spatio, excessui sc. quadrati ex AK supra spatium P. Tanget

F f 2

propterea

propterea punctum E circumferentiam positione datam, per Prop. 5. Lib. 2. hujus.



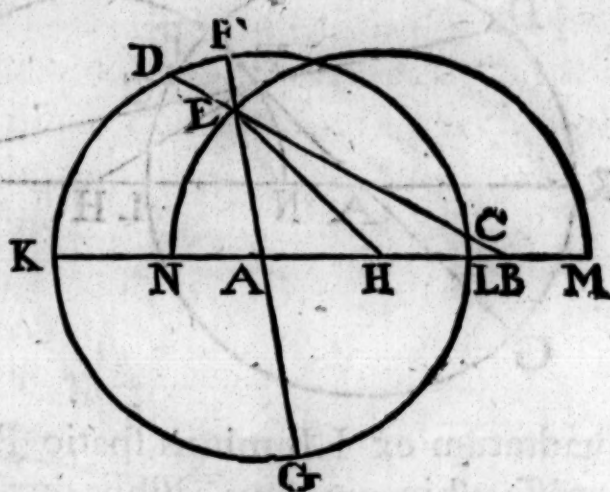
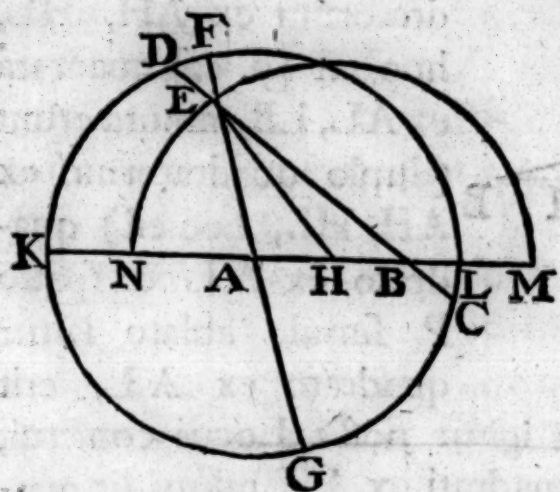
Compositio autem fiet ut in praecedente, bifariam sc. secta AB in H, duplum quadrati ex AH minus debet esse excessu quadrati ex AK supra spatium P. Sit autem duplum quadrati ex AH simul cum duplo quadrati ex HM aequale praedicto excessui, et centro H, intervallo HM, describatur circulus; erit hujus circumferentia Locus quaesitus; quod prorsus ut in praecedente ostendetur, ut et circulum Localem MEN totum intra datum circulum cadere.

PROP. XIII.

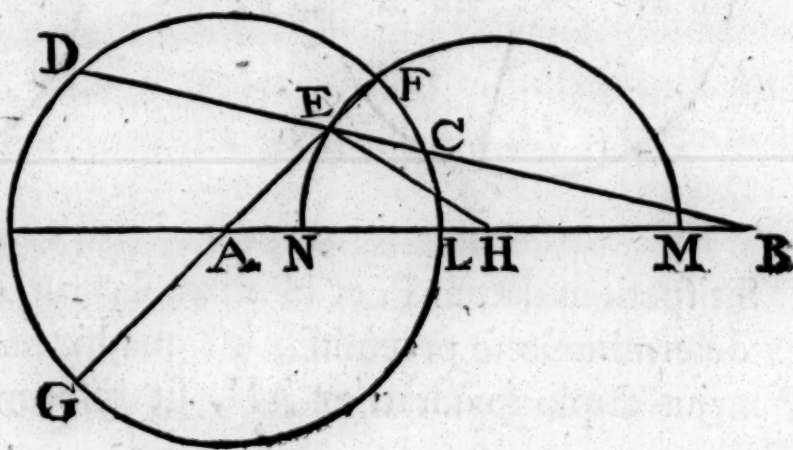
SIT jam quadratum ex BE aequale rectangulo CED seu FEG simul cum dato spatio P, reliquis ut in praecedente manentibus: tanget punctum E circumferentiam positione datam.

Quoniam enim quadratum ex BE aequale est rectangulo FEG una cum spatio P; addatur commune quadratum ex AE, et quadrata ex BE, AE simul aequalia erunt quadrato ex AG seu AL una cum spatio

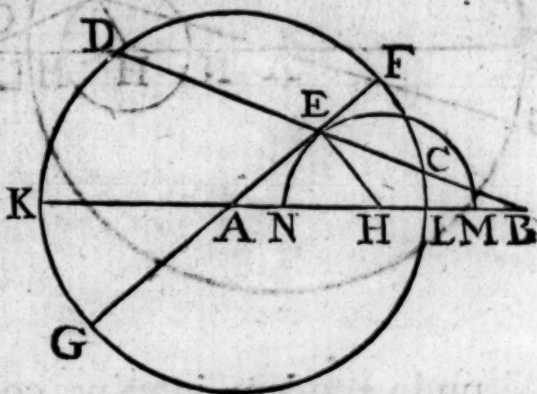
tio P, hoc est spatio dato: ergo tanget punctum E circumferentiam positione datam, per Cas. 1. Prop. 5. Lib. 2. hujus.



Bifariam autem secta AB in H, et producta ad circulum in K, L, punctis, quorum K remotius est a puncto B; manifestum est, ex determinatione Casus citati, oportere duplum quadrati ex AH minus esse spatio dato, hoc est, quadrato ex AL una cum spatio P; quod quidem necessario fiet in Casu quo punctum B est intra circulum. Praeterea quoniam requiritur ut punctum E cadat intra circulum datum, et est HK maxima recta quae a puncto H ad circumferentiam KDL duci potest [7, 8. 3.], siue punctum H fuerit intra siue extra circulum, major erit HK juncta HE; quare duplum quadratorum ex KH, HA, hoc est, [10. 2.] quadrata ex KA, KB simul, majora erunt duplo quadratorum ex EH, HA, hoc est (ut ex compositione Cas. 1. Prop. 5. Lib. 2. hujus patet) quadrato ex KA et spatio P simul. ablato igitur communi quadrato ex KA, reliquum quadratum ex KB reliquo spatio P majus erit. Similiter, in Casu quo punctum H cadit extracirculum, quoniam LH



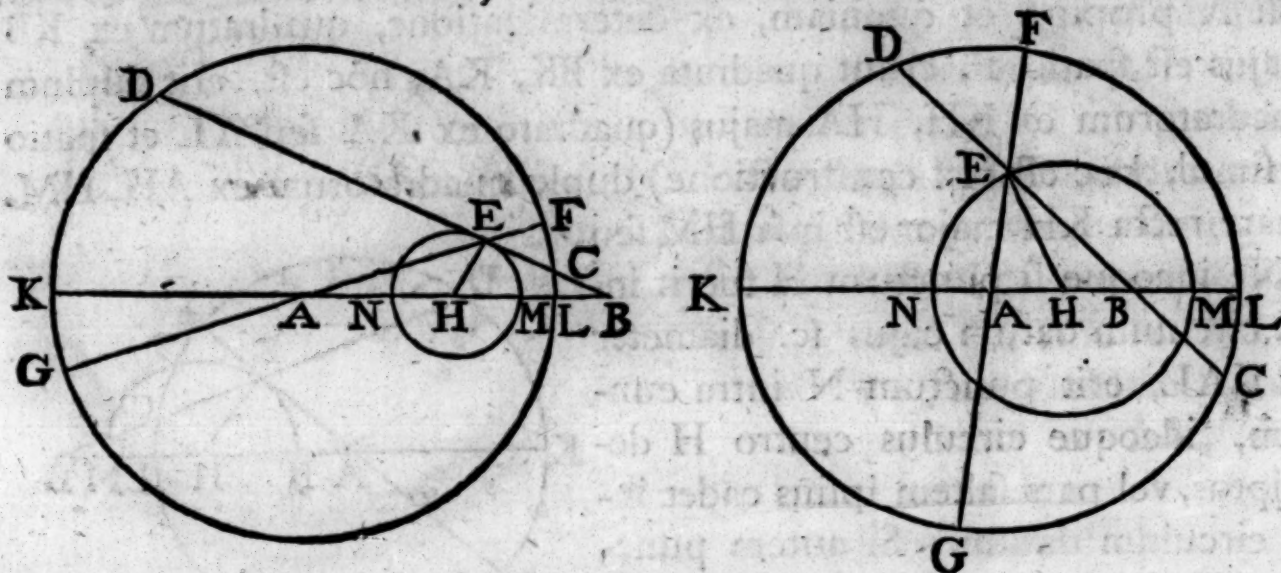
quadrati ex HM , et centro H , intervallo HM , describatur circulus qui rectae KL rursus occurrat in N , punctorum autem M , N sit N ipsi A propius. et quoniam, ex determinatione, quadratum ex KB majus est spatio P , erunt quadrata ex BK , KA , hoc est, erit duplum quadratorum ex KH , HA majus (quadrato ex KA seu AL et spatio P simul, hoc est, ex constructione) duplo quadratorum ex AH , HM . quare recta KH major est ipsa HM seu HN ; ideoque si punctum H fuerit intra circulum datum cujus sc. diameter est KAL , erit punctum N intra eundem, ideoque circulus centro H descriptus, vel pars saltem ipsius cadet intra circulum datum. Si autem punctum H fuerit extra circulum datum; quoniam, ex determinatione in hoc casu, quadratum ex LB minus est spatio P , erunt quadrata ex AL , LB simul, hoc est, duplum quadratorum ex AH , HL minus (quadrato ex AL et spatio P simul, hoc est, ex constructione) duplo quadratorum ex AH , HN . quare, recta HL minor est ipsa HN ; KH autem ostensa fuit major eadem HN ; cadit igitur punctum N inter K , L , et propterea circulus centro H descriptus necessario, in hoc casu, secabit circulum datum.



Hisce praemissis, sumatur in circuli descripti circumferentia punctum quodvis E intra circulum datum cujus centrum A , et ducatur BE occurrens circulo cujus centrum A in C , D ; et AE eidem occurrens in F , G punctis; igitur, per Cas. 1. Prop. 5. Lib. 2. hujus, quadrata ex BE , EA simul aequalia sunt quadrato ex AK seu AF , et spatio P simul; et ablato communi quadrato ex AE , erit reliquum quadratum ex BE aequale rectangulo FEG seu CED , et spatio P simul.

Observandum est in Casu quo punctum H est intra circulum datum, posse quadratum ex LB majus, aequale vel minus esse spatio P ;

P; ideoque erit LH major, aequalis vel minor ipsa HM, et circulus Localis propterea in primo Casu cadet totus intra datum circulum,



in secundo eundem interius continget, in tertio vero ipsum secabit. quae eodem modo ostenduntur quo recta LH ostensa fuit minor ipsa HN seu HM, in Casu quo quadratum ex LB minus est spatio P, et punctum H extra circulum.

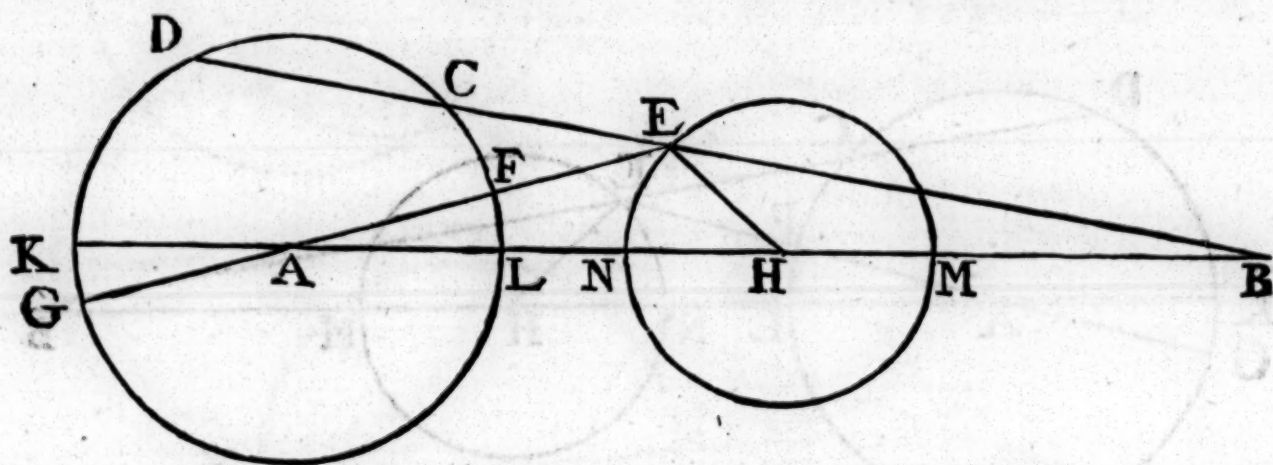
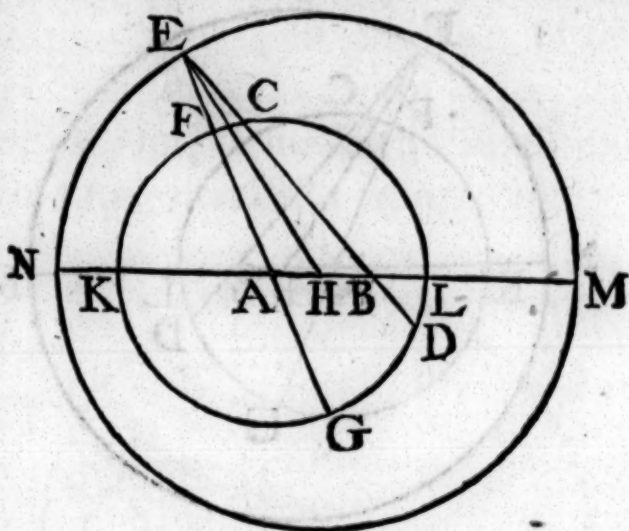
PROP. XIV.

Denique sit quadratum ex BE una cum rectangulo CED, seu FEG aequale spatio dato P; punctum autem E sit extra circulum datum: tanget punctum E circumferentiam positione datam.

Quoniam enim quadratum ex BE una cum rectangulo FEG aequale est spatio P, addatur commune quadratum ex AG seu AK, et quadrata ex BE, AE simul, aequalia erunt quadrato ex AK et spatio P, hoc est spatio dato. ergo tangit punctum E circumferentiam positione datam per Cas. 1. Prop. 5. Lib. 2. hujus.

Bifariam

Bifariam autem secta AB in H, manifestum est, ex determinatione in Prop. 5. Casu citato, oportere in omni casu duplum quadrati ex AH minus esse quadrato ex AK una cum spatio P. et si punctum H fuerit intra circulum datum, quoniam est HL minima omnium quae a puncto H ad circumferentiam duci possunt, et est punctum E extra circulum; necesse est ut HL minor sit ipsa HE. quare duplum quadratorum ex AH, HL, hoc est, qua-



drata ex AL, BL simul minora sunt (duplo quadratorum ex AH, HE, hoc est, ut constat ex compositione Casus citati) quadrato ex AL et spatio P simul. quadratum igitur ex BL minus debet esse spatio P. hisce praemissis,

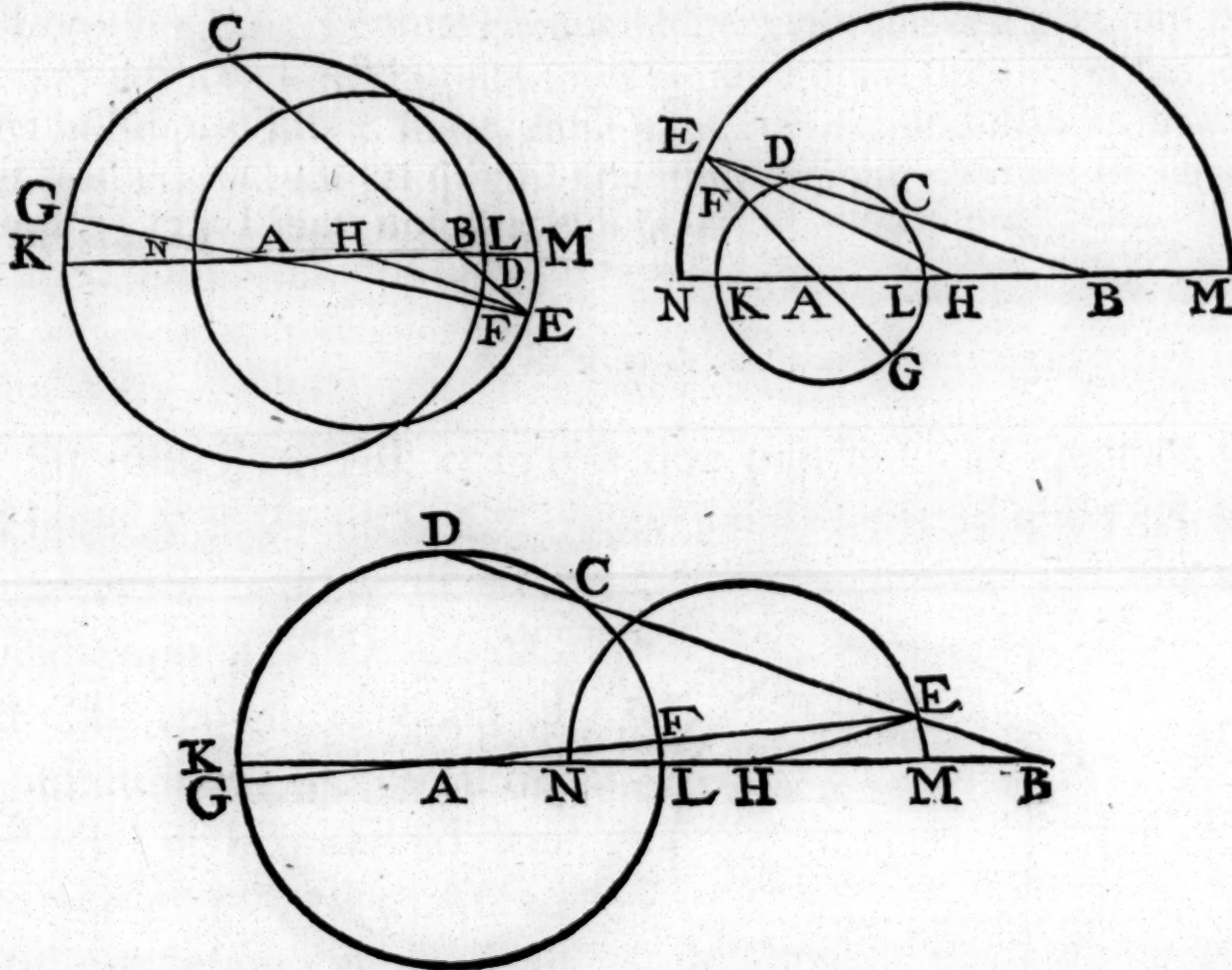
Componetur ita,

Sit spatium datum P, et bifariam secetur AB in H, et sit excessus quadrati ex AK seu AL, una cum spatio P, supra duplum quadratum ex AH aequalis duplo quadrati ex HM, centro vero H, intervallo HM, describatur circulus occurrens rectae KL rursus in N; punctorum autem M, N sit N ipsi A propius. Si igitur centrum H descripti circuli fuerit extra circulum datum, manifestum est circulum illum extra

G g

hunc

Poterit autem circulus Localis vel datum circulum includere, sc. si spatium P majus sit quadrato ex BK, vel totus extra datum circulum cadere, sc. si spatium P minus sit quadrato ex BL, et punctum H sit extra circulum datum; vel denique poterit circulum datum secare, sc. si spatium P minus fuerit quadrato ex BK, majus autem quadrato ex BL, quae ex iis quae in Prop. 13. dicta sunt, manifesta erunt.



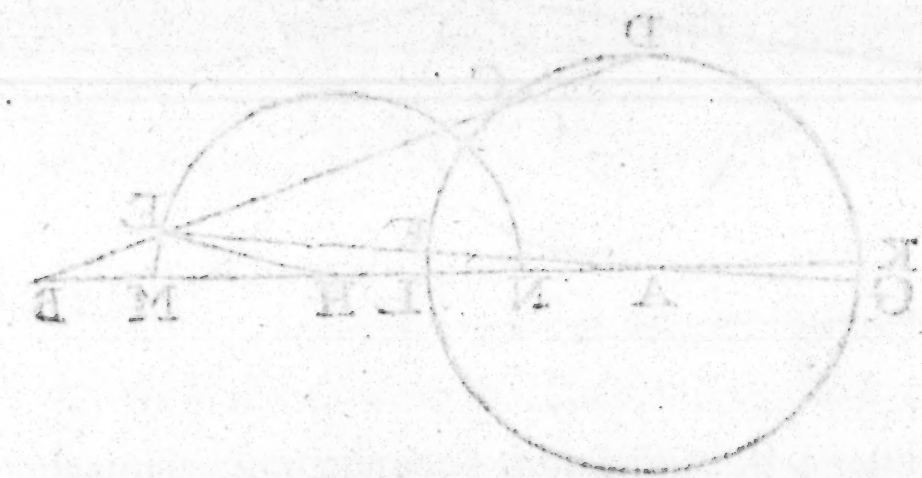
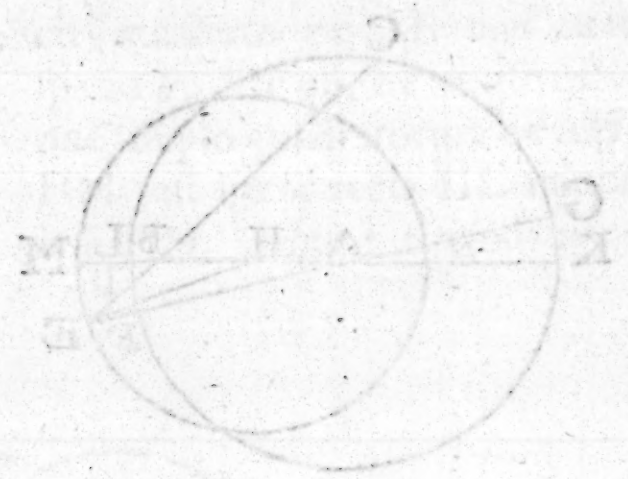
LOCORUM PLANORUM APOLLONII

FINIS.

G g 2

APPEN-

Potest autem circulus localis vel datum circulus includi, si
 spatio P majus sit quadrato ex BK, vel totus ex is datum circulus
 cadat. Si si spatio P minus sit quadrato ex BK, et spatio P si
 exis circulus datum, vel datum potest circulus datum includi, si
 si spatio P minus sit quadrato ex BK, majus autem quadrato ex
 BK, quae ex is quae in Prop. 18. distat, praestabitur.



LOCORUM PLANORUM ANALYTICA

FINIS

ALBEN



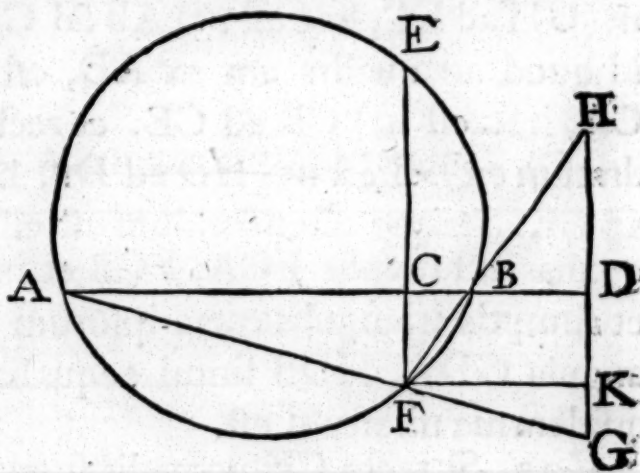
170

A P P E N D I X.

OPERAE pretium visum est Lemmatibus Prop. 5. Lib. 2. sequentia duo apponere, quibus Lemmata duo Pappi 7^{timum} sc. et 8^{vum} magis generalia redduntur; eximii enim sunt usus in multis Problematibus et Locis solvendis, Tertium quoque additum est cujus ope utendum est in quibusdam ex Locis in quibus vice summae quadratorum vel spatiorum in Prop. 5. Lib. 2. hujus, datus est excessus quorundam ex iis super reliqua quadrata vel spatia. Quartum denique additum est cujus ope Prop. 33. Lib. 1. hujus extendi potest ad quotcunque rectas.

L E M M A I.

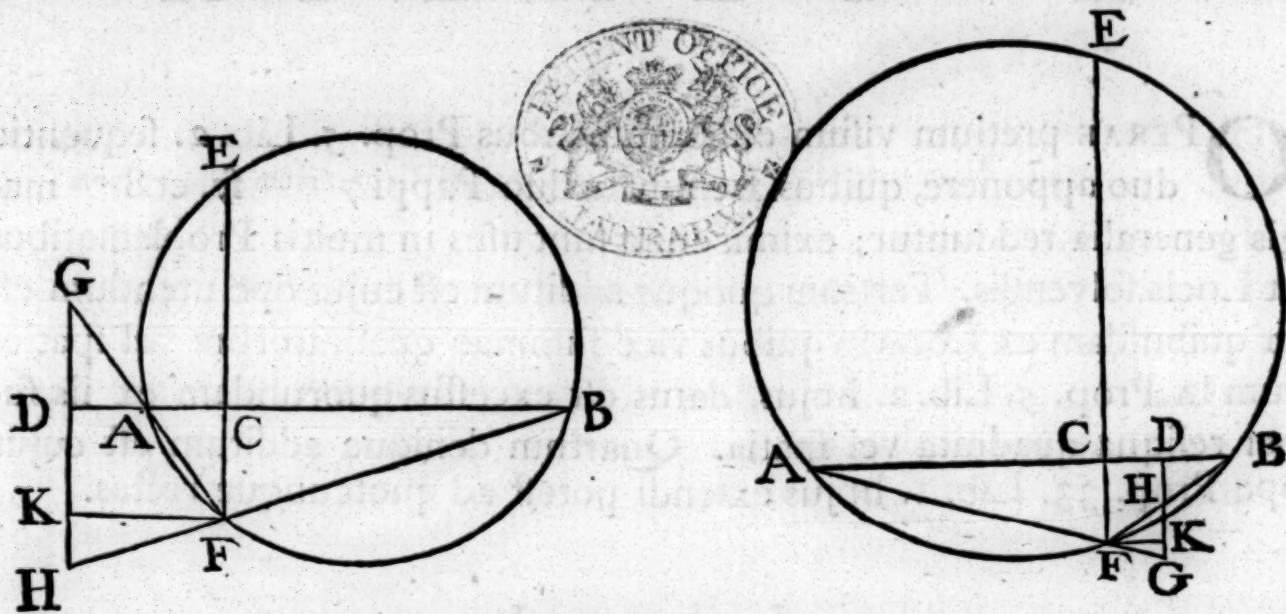
Sit recta linea AB, et in ipsa duo puncta C, D, quorum C sit inter A et B: et sit CE quaevis recta: erit id quod est ad quadratum ex AD, ut BC ad CE, una cum eo quod est ad quadratum ex BD, ut AC ad CE, aequale ei quod ad quadratum ex AC, est ut BC ad CE, et ei quod ad quadratum ex BC, est ut AC ad CE, et insuper ei quod ad quadratum ex CD, est ut AB ad CE.



Ponatur CE ad rectos angulos ipsi AC, et per A, B, E, puncta describatur circulus, cui EC rursus occurrat in F; et junctis AF, BF, ducatur DG parallela ipsi CF, iisdem occurrens in G, H; ad DG vero ducatur recta FK parallela ipsi CB.

Est

Est igitur rectangulum FCA id quod ad quadratum ex AC, est ut (FC ad CA, hoc est ut) BC ad CE. et rectangulum FCB est id quod



ad quadratum ex CB, est ut (FC ad CB, hoc est ut) AC ad CE. Quoniam vero est BC ad CE, ut (FC ad CA, hoc est ut) GK ad KF seu CD; et quoniam est AC ad CE, ut (FC ad CB, hoc est ut) HK ad KF; erit, per 24, 5. AB, ad CE, ut GH ad KF seu CD. ergo rectangulum contentum GH, KF, est id quod ad quadratum ex KF seu CD, est ut (GH ad KF, hoc est ut) AB ad CE. Praeterea est rectangulum GDA id quod ad quadratum ex AD, est ut (GD ad DA, hoc est ut FC ad CA, hoc est ut) CB ad CE. et rectangulum HDB est id quod ad quadratum ex DB est ut (HD ad DB, hoc est ut FC ad CB, hoc est ut) AC ad CE. Itaque ostendendum est esse rectangula GDA, HDB simul aequalia rectangulis FCA, FCB et insuper ei quod GH, KF continetur. et sumptis triangulis quae ipsorum sunt dimidia, ostendendum est triangula GDA, HDB simul aequalia esse triangulis AFB, GFH, quod quidem manifestum est.

COR. Si recta CE aequalis fuerit ipsi CB, Lemma hoc idem est cum Lem. 7. Pappi. Si autem CE aequalis fuerit rectae AB, erit id quod ad quadratum ex AC, est ut BC ad CE una cum eo quod ad quadratum ex BC, est ut AC ad CE aequale, ut ostensum fuit, rectangulis FCA, FCB, hoc est rectangulo FC, AB hoc est, quia aequalis est CE ipsi AB, rectangulo FCE seu ACB. id vero quod est ad quadratum ex CD, ut AB

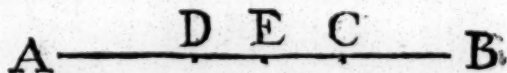
AB ad CE, est ipsum ex CD quadratum. Lemma igitur in hoc casu ita enunciari potest,

Si in recta linea AB sumantur duo puncta C, D, quorum C sit inter A et B; erit id quod est ad quadratum ex AD, ut BC ad BA, una cum eo quod est ad quadratum ex BD, ut AC ad AB aequale rectangulo ACB et quadrato ex CD simul.

Lemmate hoc usus sum ad demonstrandos Casus Prop. 5. Lib. 2. in quibus figurae speciei datae non sunt quadrata, antequam inveneram Lem. 10. Alias autem ejus demonstrationes, olim, hortatu meo, excogitarunt discipuli quondam mei Dominus Jacobus Moor, et Dominus Matthaeus Steuart, quorum prior literas Graecas in hac Academia, alter Mathesin in Academia Edinburgensi, magna cum laude proficitur. Et demonstratio quidem Dom. Jac. Moor similis omnino est iis quae habentur in Prop. 9. et Prop. 10. Lib. 2. Element. Euclidis, quas Lemmatis hujus casus esse simplicissimos recte observavit. Dom. Matth. Steuart aliam etiam ultimi Casus Lem. 10. demonstrationem dedit in Prop. 1. et 2. Libri sui de quibusdam Theorematis generalibus, &c. qui prodijt Edinburgi anno 1746, ejusque usum in eximiis quibusdam propositionibus demonstrandis ostendit.

LEMMA II.

Sit recta linea AB positione et magnitudine data, et in ipsa, vel in ipsa ad utraque partes producta, sumatur quodvis punctum C; erit id quod ad quadratum ex AC datam habet ratio-



nem, una cum eo quod ad quadratum ex BC datam habet rationem, aequale spatio dato, una cum eo quod ad quadratum ex segmento inter punctum C et datum punctum in recta AB, datam habet rationem.

Sit M id quod ad quadratum ex AC, et N id quod ad quadratum ex BC datam habet rationem. et per Lem. 9. Lib. 2. hujus, inveniatur in AB

AB punctum D, et recta DE, ita ut M sit ad quadratum ex AC, ut BD ad DE, et N sit ad quadratum ex BC, ut AD ad DE. datum igitur est punctum D. et per Lem. i. praecedens, erit M una cum N aequale

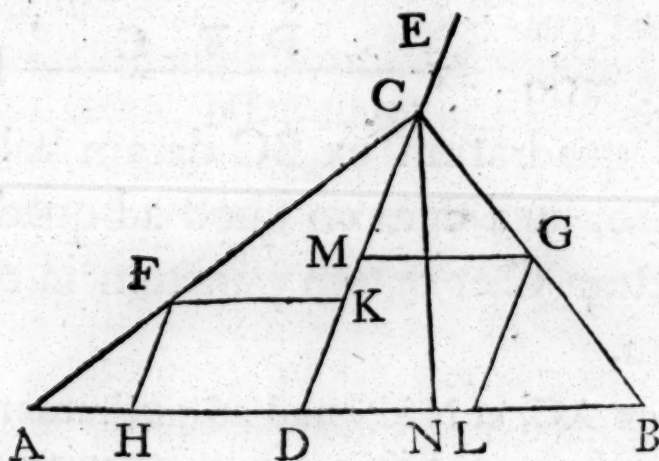
A — D E C — B

ei quod ad quadratum ex AD datam habet rationem BD ad DE, una cum eo quod ad quadratum ex BD datam habet rationem AD ad DE, et insuper ei quod ad quadratum ex CD datam habet rationem AB ad DE. Datae autem sunt rectae AD, DB, et quadrata ex ipsis, quare et data sunt spatia quae ad quadrata haec datas habent rationes. Ergo M una cum N aequale est datis hisce spatiis, una cum eo quod ad quadratum ex segmento CD inter punctum C et datum punctum D, datam habet rationem.

LEMMA III.

Si a vertice C trianguli ABC ducatur utcunque CD ad basim; erit id quod ad quadratum ex AC, est ut BD ad BA, una cum eo quod ad quadratum ex BC, est ut AD ad AB, aequale rectangulo ADB una cum quadrato ex DC.

Lemma hoc est casus Lem. 10. Lib. 2. in quo recta DE aequalis est ipsi AB; et, ex ibi ostensis, ita demonstratur. Quoniam, facta Lemmat



tis 10. constructione, ostensum fuit rectangulum FCA una cum ipso GCB aequale rectangulis HDA, LDB, KCD et MCD; quorum KCD, MCD simul, ostensa fuerunt habere ad quadratum ex DC rationem AB ad DE, erunt KCD, MCD in hoc casu simul aequalia quadrato

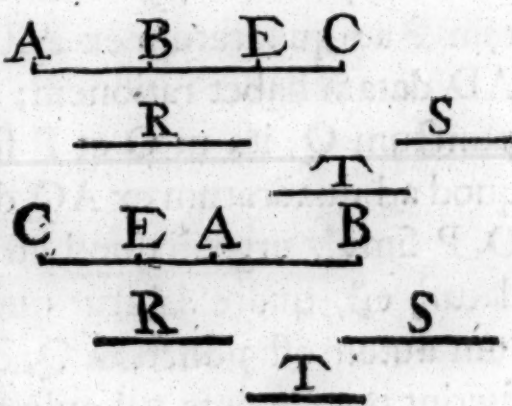
quadrato ex DC. et quoniam aequales ostensae sunt HD, DL, erunt rectangula HDA, LDB simul aequalia rectangulo HD, AB. ergo rectangula FCA, GCB simul aequalia sunt ipsi HD, AB una cum quadrato ex DC. est autem HD ad AD, ut (FC ad CA, hoc est, ex constructione, ut) BD ad DE sive AB. quare rectangulum HD, AB aequale est ipsi ADB. ergo rectangulum FCA, sive id quod ad quadratum ex AC est ut BD ad BA, una cum ipso GCB, sive id quod est ad quadratum ex BC, ut AD ad AB, simul aequalia sunt rectangulo ADB et quadrato ex DC.

Similiter Casus ultimus Lem. 10. qui sine ope ejus ostensus fuit, ita breviter ex eo ostendetur. Est sc. Casus Lemmatis 10. in quo recta DE aequalis est ipsi DB. et ostendendum est quadratum ex AC una cum eo quod ad quadratum ex BC, est ut AD ad DB sive DE, aequale rectangulo BAD una cum eo quod ad quadratum ex DC, est ut AB ad BD. quod quidem patet, quoniam id quod ad quadratum ex AD, est ut BD ad DE, una cum eo quod ad quadratum ex DB, est ut AD ad DE sive DB, aequale est [3. 2.] rectangulo BAD. quare, per Lem. 10. quadratum ex AC una cum eo quod ad quadratum ex BC, est ut AD ad DB, aequale est rectangulo BAD una cum eo quod ad quadratum ex DC, est ut AB ad DE sive DB.

Quae sequuntur Propositiones, prima excepta, ostenduntur ope casus Lem. 9. Lib. 2. in quo punctum inveniendum requiritur esse in recta data ad utrasvis partes producta. quare intelligatur sequens Corollarium fini istius Lemmatis appositum esse, proprio sc. ejus loco, quo oblivione excidit.

COR. Et similiter prorsus inveniri poterit punctum in recta AB producta ad utrasvis partes, ita ut segmenta inter ipsum et terminos ipsius AB, ad datam quandam rectam datas habebunt rationes R ad T, et S ad T. Si autem ratio R ad S, hoc est, ratio AC ad CB, sit majoris ad minorem, sumendum est punctum C in AB produc-

H h



ta

ta ad partes B. et contra, si ratio ea fuerit minoris ad maiorem, sumendum est C in AB producta ad partes A.

LEMMA IV.

Si in recta linea sumatur punctum A, et in eadem data sint quotcunque puncta B, C, D &c. si summa spatiorum quae ad quadrata ex segmentis inter punctum A et data puncta, singula ad singula, datas habent rationes, data fuerit; dabitur punctum A.

Primò, Sint duo puncta data B, C, sitque spatium M id quod ad quadratum ex AB, et N id quod ad quadratum ex AC datas habent rationes. Dabitur igitur, per Lem. 2. Appendicis, in BC punctum R, ita ut M una cum N aequale sit dato spatio una cum eo quod ad quadratum ex AR datam habet rationem. data autem est summa ipsorum M, N; quare id quod ad quadratum ex AR datam habet rationem datum est; et propterea dabitur quadratum ex AR, et ipsa AR data erit. datum autem est punctum R, quare et punctum A.

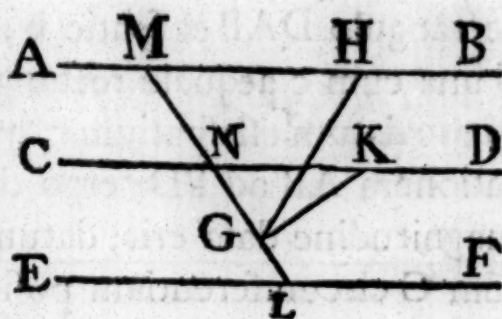
Secundo, Data sint tria puncta B, C, D; et sint M, N, O spatia quae ad quadrata ex AB, AC, AD, datas habent rationes. ostensum autem fuit, in praecedente, M una cum N aequale esse spatio dato una cum eo quod ad quadratum ex AR datam habet rationem. ergo M, N, O, simul aequalia sunt spatio dato una cum eo quod ad quadratum ex AR datam habet rationem (quod dicatur P) et spatio O. Data autem sunt M, N, O, ex hypothesi; ergo P simul cum O aequale est spatio dato. habet autem P ad quadratum ex AR datam rationem, et O ad quadratum ex AD datam habet rationem; dabitur igitur [Lem. 2. App.] in recta RD punctum Q, ita ut O et P simul aequalia sint spatio dato una cum eo quod ad quadratum ex AQ datam habet rationem. et data ostensa sunt O, P simul. ergo id quod ad quadratum ex AQ datam habet rationem, datum est, quare dabitur quadratum ex AQ, et ipsa AQ data erit. Datum autem est punctum Q, quare et punctum A. et similiter si quatuor fuerint puncta data, vel quinque &c. ostendetur punctum A datum esse.

PROP.

P R O P. I.

DATIS quotcunque rectis inter se parallelis AB, CD, EF &c. si a puncto G ad ipsas in angulis datis ducantur GH, GK, GL &c. fuerintque spatia quae ad quadrata ex ductis, singula ad singula, datas habent rationes, simul data; tanget punctum G rectam positione datam.

Producatur enim una ex ductis LG, occurratque reliquis parallelis in M, N. igitur, propter triangulum GHM specie datum, dabitur ratio quadrati ex GH ad quadratum ex GM; quare id quod ad quadratum ex GH datam habet rationem, habebit etiam ad quadratum ex GM datam rationem [8. dat.]. similiter id quod ad quadratum ex GK datam habet rationem, habebit etiam rationem datam ad quadratum ex GN. Data autem sunt L, N, M, puncta in quavis recta, in angulo dato GLE ducta inter parallelas, per datum quodvis punctum, ut L. Quoniam igitur data sunt L, N, M, puncta, et summa spatiorum quae ad quadrata ex ipsis GM, GN, GL, singula ad singula, datas habent rationes, data est; dabitur punctum G, [Lem. 4. App.] et recta LG quae ducta est in dato angulo ad positione datam EF. ergo tangit G rectam positione datam, per Prop. 20. Lib. 1. hujus.



P R O P. II.

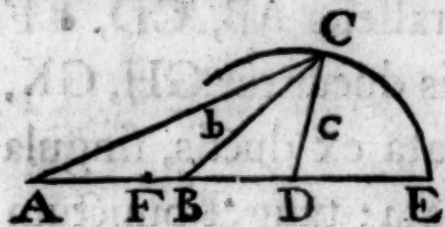
Si a duobus punctis datis A, B, inflectantur ad punctum C rectae AC, BC; fueritque quadratum ex AC majus eo quod ad quadratum ex BC datam habet rationem, dato spatio: tanget punctum C circumferentiam positione datam.

Cas. I. Quando ratio data est majoris ad minorem.

H h 2

Sit

Sit b spatium quod ad quadratum ex BC datam habet rationem, et in AB , producta ad partes B , sit punctum D quod facit rationem AD ad DB , eandem rationi b ad quadratum ex BC . datum igitur est punctum D , dataeque erunt rectae AD , BD . Jungatur DC , et sit c spatium quod ad quadratum ex DC , est ut AB ad BD . ergo, per Cas. ultimum Lem. 10.



erit quadratum ex AC una cum c aequale rectangulo DAB una cum b . ex hypothesi autem, quadratum ex AC aequale est spatio b una cum dato spatio, quod dicatur S ; ergo spatia b , S , c , simul aequalia sunt rectangulo DAB et spatio b ; ablatoque communi spatio b , erit spatium S una cum c aequale rectangulo dato DAB . datumque est spatium S , quare datum est spatium c , quod sc. ad quadratum ex DC , datam habet rationem AB ad BD ; ergo datum est quadratum ex DC , et ipsa DC magnitudine data erit; datumque est punctum D ; tangit igitur punctum C circumferentiam positione datam, per Prop. 1. Lib. 1. hujus.

Componetur ita.

Sit ratio data quam habere debet spatium b ad quadratum ex BC , ea quam habet recta P ad rectam Q . et ut P ad Q , ita fiat AD ad DB . sit autem S spatium datum quo sc. quadratum ex AC excedere debet ipsum b . Debet autem spatium S minus esse rectangulo DAB , ut ex analysi constat. Sit igitur S aequale rectangulo FAB , quoniam igitur rectangulum FAB una cum contento AB , FD aequale est ipsi DAB , erit AB , FD spatium quod in analysi dictum fuit c . et quoniam c , hoc est contentum AB , FD , est ad rectangulum BDF , ut AB ad BD , erit rectangulum BDF aequale quadrato ex recta invenienda DC . Inter BD igitur et DF inveniatur media proportionalis DE , centroque D , intervallo DE , describatur circulus; erit hujus circumferentia Locus quaesitus; hoc est, si ad quodvis in ipsa punctum C inflectantur rectae AC , BC , erit quadratum ex AC majus eq spatio b , quod ad quadratum ex BC , est ut AD ad DB , spatio dato S sive rectangulo FAB . Jungatur enim DC ; et quoniam a vertice trianguli ADC , ducta est CB ad basim, et est c sive rectangulum AB , FD ad quadratum ex DE sive DC , hoc est, ad rectangulum BDF ut AB , ad BD ; et b ad quadratum ex BC , ut AD ad DB ; erit
per

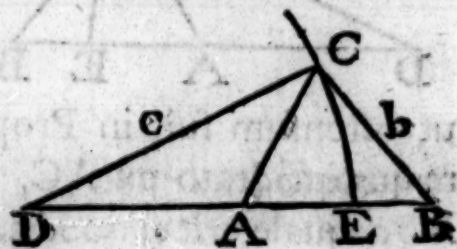
per Caf. ultimum Lem. 10. quadratum ex AC una cum c aequale rectangulo DAB una cum b, hoc est, ex constructione, spatiis S, c una cum b. auferatur commune spatium c, et reliquum, quadratum sc. ex AC, aequale erit spatio S una cum ipso b.

Caf. II. Quando ratio data est minoris ad majorem, reliquis ut in primo manentibus.

Sit D punctum in recta AB producta ad partes A, quod facit rationem AD ad DB, eandem rationi spatii b ad quadratum ex BC. et junctâ DC, sit c spatium quod ad quadratum ex DC, est ut AB ad BD. ergo per Lem.

3. Appendicis, spatia c, b simul aequalia sunt rectangulo DAB, et quadrato ex AC;

et, ex hypothesi, quadratum ex AC aequale est spatio b et S simul. ergo spatia c, b simul aequalia sunt rectangulo DAB, et spatiis b, S. ablato igitur communi b, erit spatium c aequale rectangulo dato DAB, et spatio dato S. datum igitur est spatium c, quare et quadratum ex DC ad quod c datam habet rationem AB ad BD. data igitur est DC magnitudine, datumque est punctum D; ergo tangit punctum C circumferentiam positione datam.



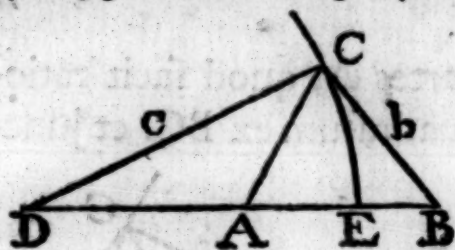
Componetur ita.

Inveniatur in AB producta, ad partes A, quia ratio data est minoris ad majorem, punctum D quod facit rationem AD ad DB eandem datae rationi quam habere debet spatium b ad quadratum ex BC. et sit spatium c aequale rectangulo DAB et spatio S simul. ut autem AB ad BD, ita fiat c ad quadratum ex recta DE. centro autem D, intervallo DE, describatur circulus; erit hujus circumferentia Locus quaesitus. ad quodvis enim in ipsa punctum C, inflectantur AC, BC, et DC jungatur. et per Lem. 3. App. erit c una cum b aequale rectangulo DAB et quadrato ex AC, hoc est, ex constructione, rectangulum DAB, spatium S, et spatium b simul, aequalia sunt rectangulo DAB et quadrato ex AC. ergo quadratum ex AC aequale est spatio S et spatio b, hoc est, quadratum ex AC majus est spatio b, dato spatio S.

Propositio haec eadem est cum Prop. 4. Lib. 2. hujus. Quoniam enim quadratum ex AC aequale est spatio b quod ad quadratum ex BC

da-

datam habet rationem, una cum dato spatio S ; erit quadratum ex AC , dempto spatio S , aequale ipsi b ; et propterea quadratum ex AC , dempto spatio S , habet ad quadratum ex BC datam rationem, hoc est, quadratum ex AC majus est quadrato ex BC , dato, quam in ratione; quae est hypothesis Prop. 4. Lib. 2. hujus.

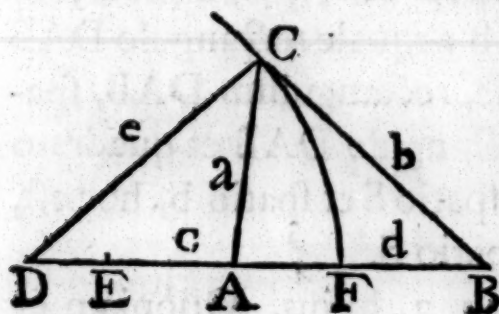


Si autem quadratum ex AC una cum dato spatio aequale fuerit ei quod ad quadratum ex BC datam habet rationem, hoc est, si quadratum ex AC minus fuerit quadrato ex BC , dato, quam in ratione; et vicissim, ut ostensum fuit in Prop. 24. Lib. 1. hujus, erit quadratum ex BC majus quadrato ex AC , dato, quam in ratione, hoc est quadratum ex BC aequale erit ei quod ad quadratum ex AC datam habet rationem una cum spatio dato; et propterea punctum C tanget circumferentiam positione datam per hanc Propositionem.

PROP. III.

DATIS duobus punctis A , B , si ab ipsis ad punctum C inflectantur duae rectae AC , BC , fueritque id quod ad quadratum ex una ipsarum AC datam habet rationem, aequale ei quod ad quadratum ex altera BC datam habet rationem una cum spatio dato S ; tanget punctum C circumferentiam positione datam.

Sit a illud quod ad quadratum ex AC , datam habet rationem, et b illud quod ad quadratum ex BC datam habet rationem. poterit igitur,



per Lem. 9. inveniri punctum D in recta AB producta, et recta DE , ita ut BD sit ad DE , ut a ad quadratum ex AC ; et AD sit ad DE , ut b ad quadratum ex BC . Inveniantur, et DC jungatur. sit autem c id quod ad quadratum ex AD est ut BA ad DE , d vero ad quadratum ex AB , ut AD ad DE , et e ad

e ad quadratum ex DC, ut BA ad DE. ergo, propter datas BA, AD, dabuntur c et d. est vero, per Lem. 10. e una cum b aequale ipsis c, d, a, simul; et, ex hypothesi, a aequale est ipsi b una cum S; ergo e una cum b aequale est ipsis c, d, b, S. auferatur commune spatium b, et e aequale erit datis spatiis c, d, S simul. datum igitur est e. Est autem e ad quadratum ex DC, in data ratione quam habet AB ad DE; ergo datum est quadratum ex DC, ipsaque DC magnitudine data erit; datumque est punctum D. ergo tangit C circumferentiam positione datam.

Componetur ita,

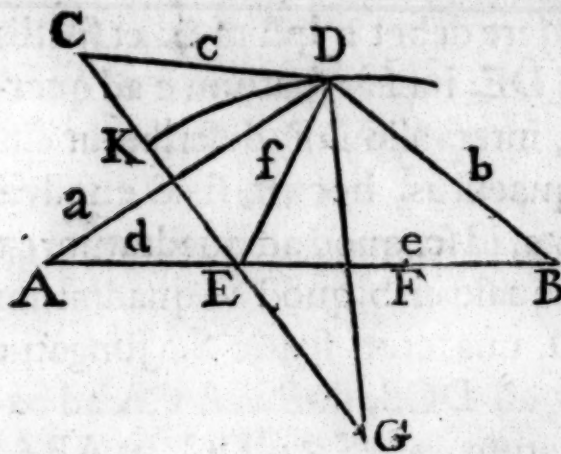
Sit ratio data quam habere debet a ad quadratum ex AC, eadem rationi quam habet recta M ad ipsam O; quam vero habere debet b ad quadratum ex BC, eadem sit rationi rectae N ad O. et, si ratio M ad N fuerit majoris ad minorem, inveniatur per Lem. 9. in AB producta ad partes ipsius A, punctum D, et recta DE, ita ut BD sit ad DE, ut M ad O; AD vero sit ad DE, ut N ad O. si autem ratio M ad N fuerit minoris ad maiorem, ponatur M pro N, et A loco B, et a pro b, et vice versa. fiat vero, in utroque casu, ut AB ad DE, ita spatium quoddam e ad quadratum ex AD; et ut AD ad DE, ita spatium quoddam d ad quadratum ex AB. sitque S spatium datum quo excedere debet a ipsum b. et spatiis c, d, S, aequale fiat spatium e; et ut AB ad DE, ita fiat spatium e ad quadratum, quadratum sc. ex DF; et, centro D, intervallo DF, describatur circulus; erit hujus circumferentia Locus quaesitus. hoc est, si ad quodvis in ea punctum C, ducantur AC, BC, erit a, id sc. quod ad quadratum ex AC, est ut BD ad DE, seu ut M ad O, aequale ei b quod ad quadratum ex BC est ut AD ad DE, seu ut N ad O, una cum spatio S. Jungatur enim DC; et quoniam a vertice C trianguli DCB, ducta est CA ad basim, et, ex constructione, est e ad quadratum ex DF seu DC, ut AB ad DE, et b ad quadratum ex BC, ut AD ad DE, et c ad quadratum ex DA, ut AB ad DE, d vero ad quadratum ex AB, ut AD ad DE, et a ad quadratum ex AC, ut DB ad DE; erit, per Lem. 10. e una cum b aequale ipsis c, d, a, simul. ex constructione autem est e aequale ipsis c, d, S, simul; ergo b, c, d, S simul aequalia sunt ipsis c, d, a, simul. et ablatis spatiis c, d; erit spatium a aequale ipsis b, S, simul.

PROP.

PROP. IV.

DATIS tribus punctis A, B, C, si ab ipsis ad punctum D in-
flectantur AD, BD, CD, fueritque id quod ad quadratum ex
AD datam habet rationem, una cum eo quod ad quadratum
ex BD datam habet rationem, aequale ei quod ad quadratum
ex CD datam habet rationem una cum spatio dato S; tan-
get punctum D circumferentiam positione datam.

Sit enim a id quod ad quadratum ex AD, b id quod ad quadratum
ex BD, c id quod ad quadratum ex CD, datas habent rationes. et, per
Lem. 9. inveniatur in juncta AB, punctum E, ut et recta EF, ita ut a
sit ad quadratum ex AD, ut BE ad EF, b vero sit ad quadratum ex
BD, ut AE ad EF. sitque d id quod ad quadratum ex AE, est ut BE
ad EF; e id quod ad quadratum ex BE, est ut AE ad EF; et f id quod
ad quadratum ex juncta ED, est ut AB ad EF: ergo, per Lem. 10. e-



rit a una cum b aequale ipsis d, e, f. est
autem, ex hypothesis, a una cum b ae-
quale c una cum S, ergo d, e, f simul
aequalia sunt ipsis c, S. et data sunt spa-
tia d, e, S; quare unum ipsorum f, c
altero majus est spatio dato. igitur, per
Prop. 3. praecedentem, tangit punctum
D circumferentiam positione datam.

Componetur ita.

Inveniatur in AB punctum E, et recta EF, ita ut BE sit ad EF, in
data ratione quam habere debet a ad quadratum ex AD, et AE sit ad
EF, in data ratione quam habere debet b ad quadratum ex BD. Sit au-
tem S spatium datum quo excedere debent a et b simul ipsum c, spati-
um sc. quod ad quadratum ex CD datam debet habere rationem. et
fat ut BE ad EF, ita spatium quoddam d ad quadratum ex AE; et ut
AE

AE ad EF, ita fiat spatium quoddam e ad quadratum ex BE. et primo sint spatia d, e, simul majora ipso S, sitque ipsorum excessus spatium T. et, per Prop. 3. praecedentem, describatur circulus ad cuius quodvis punctum D, si a punctis C, E inflectantur rectae CD, ED, erit spatium sc. c quod ad quadratum ex CD datam habet rationem, aequale spatio f quod ad quadratum ex ED datam habet rationem, quam sc. habet AB ad EF, una cum ipso T. erit hujus circumferentia Locus quaesitus; hoc est, si ducantur AD, BD, erit a id sc. quod ad quadratum ex AD, est ut BE ad EF, una cum b quod ad quadratum ex BD, est ut AE ad EF, aequale spatio c una cum ipso S. Quoniam enim, ex constructione, est d una cum e aequale ipsis S, T, simul; erunt d, e, f simul aequalia ipsis S, T, f; est autem c, ex constructione, aequale ipsis f, T, quare d, e, f simul aequalia sunt ipsis S, c. Est vero per Lem. 10. a una cum b aequale ipsis d, e, f, hoc est, ipsi c una cum S.

Secundo, sit spatium S majus ipsis d, e, simul, sitque ipsorum excessus spatium V. et, per praecedentem, describatur circulus ad cuius quodvis punctum D, si inflectantur ED, CD, erit spatium f, quod sc. ad quadratum ex ED, est ut AB ad EF, aequale ipsi c quod ad quadratum ex CD datam habet rationem, una cum ipso V. Erit hujus circumferentia Locus quaesitus. Etenim, ex constructione, spatia d, e, V simul aequalia sunt ipso S; quare d, e, V, c simul aequalia sunt ipsis c, S. et, itidem ex constructione, est f aequale ipsis c, V; ergo spatia d, e, f, hoc est, spatia a, b simul aequalia sunt ipsis c, S.

Sed si d, e, simul aequales fuerint ipsi S, erit et f aequale ipsi c, et quadratum ex ED, quod datam habet rationem ad f sive c, datam habebit [8. dat.] rationem ad quadratum ex CD. Ergo et recta ED datam habebit rationem ad ipsam CD. Tanget propterea punctum D rectam vel circumferentiam positione datam, per Prop. 2. Lib. 2. huj.

F I N I S.



ERRATA.

P. 6. lin. ult. 32. 6. lege 14. 1. p. 36. lin. 12. sint, lege sunt p. 37. lin. 5. parallelae, lege parallelae p. 41. lin. 12. dele, in parte 2da. et dele FP, p. 48. lin. 17. post Propositionem, addatur, vel praecedentem si BC, DE inter se fuerint parallelae Ibid. lin. penult. post Propositionem, addatur, vel praecedentem si BC, DE inter se fuerint parallelae Ibid. lin. ult. post Propositionis, addatur, hujus, vel praecedentis p. 50. lin. penult. ipsa, lege ipso. p. 69. lin. 18, 19, 21, 23. datis, lege totidem p. 72. lin. 26. majus, lege major p. 85. lin. 3. a fine, 3/ lege 2. p. 86. lin. 17. 20. 3. lege 2. p. 182. lin. 28. praecedente, lege praecedenti p. 232. lin. 20. post quare, addatur, si d, e, simul non aequales fuerint ipsi S,

Pag. viii. lin. 11. 1670, lege 1679 p. xv. lin. 4 a fine, circumferentiam, lege circumferentia p. xvii. lin. ult. sano, lege sana p. 8. lin. penult. aequales, lege aequalis p. 96. lin. 7 a fine, adjicerimus, lege adjiceremus p. 122. lin. 14. EG, lege FG p. 142. lin. ult. occurat, lege occurrat p. 163. lin. 11. figurae, lege figura p. 188. lin. 10. parallelae, lege parallela p. 221. lin. 8. super, lege supra

2016163

